Anwendung der elliptischen Funktionen auf die Bestimmung konjugierter Punkte bei Problemen der Variationsrechnung.

Inaugural-Dissertation

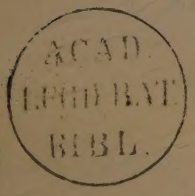
zur

Erlangung der philosophischen Doktorwürde

der

hohen philosophischen Fakultät der Kgl. Universität Breslau

vorgelegt



und mit ihrer Genehmigung veröffentlicht

von

Lothar Koschmieder.

Mittwoch, den 22. Oktober, vormittags 11 Uhr
im Musiksaale der Universität:

Vortrag:

„Geschichte der elliptischen Funktionen"

und

Promotion.

Liegnitz 1913.
Druck von Carl Seyffarth.

Gedruckt mit Genehmigung der hohen philosophischen Fakultät der Kgl. Universität Breslau.

Referent: Geh.-Rat Professor **Dr. Kneser**.

Termin der mündlichen Prüfung: 7. Mai 1913.

Meinen lieben Eltern.

Inhaltsübersicht.

Seite

Einleitung 7

I. Kapitel.

Enveloppen bei der einfachsten Aufgabe der Variationsrechnung.

I. Abschnitt: Probleme von der Form $\delta \int y^n \sqrt{1-p^2}\, dx = 0$.

§ 1. Die Extremalen 14

§ 2. $n = 1$ 14

§ 3. $n = 2$ 16

§ 4. $n = 3$ 22

II. Abschnitt: Probleme von der Form $\delta \int \sqrt{U+h}\, ds = 0$, $U = -y^n$.

§ 5. Die Extremalen 28

§ 6. $n = 2$ 29

§ 7. $n = 4$ 31

§ 8. $n = 6$ 35

II. Kapitel.

Konjugierte kinetische Brennpunkte, $\delta \int \sqrt{U+h}\, ds = 0$.

§ 9. Allgemeines 39

§ 10. $U = -y^4$, $h > 0$ 39

§ 11. $U = -y^6$, $h > 0$ 41

§ 12. $U = y^4$, $h = -l$, $l > 0$ 42

§ 13. $U = y^4$, $h > 0$ 46

§ 14. $U = \frac{1}{r^4}$, $h = -l$, $l > 0$ 49

§ 15. Eine weitere dynamische Aufgabe 53

III. Kapitel.

Konjugierte Punkte und Enveloppen beim isoperimetrischen Problem.

§ 16. $\delta \int (y+\lambda) \sqrt{1-p^2}\, dx = 0$ 58

§ 17. $\delta \int (p^2 + \lambda y^4)\, dx = 0$ 66

§ 18. Bestimmung des Rotationskörpers von möglichst grossem Volumen bei gegebener Länge des Meridians 73

Einleitung.

Die einfachste Aufgabe der Variationsrechnung ist folgende. Gegeben sei eine Funktion der Veränderlichen x, y, x', y', $F(x, y, x', y')$, die in x', y' homogen vom ersten Grade ist; dann soll, wenn t einen Parameter bedeutet, das Integral

$$J = \int F(x, y, x', y')\, dt, \quad x' = \frac{dx}{dt}, \quad y' = \frac{dy}{dt}$$

zu einem Extremum gemacht werden durch passende Wahl des funktionalen Zusammenhangs zwischen x und t, y und t. Diese Wahl hat so zu erfolgen, dass x und y als Funktionen von t den Eulerschen Differentialgleichungen

$$F_x - \frac{dF_{x'}}{dt} = 0,$$

$$F_y - \frac{dF_{y'}}{dt} = 0 \ ^{1})$$

genügen. Die Lösungen dieser Differentialgleichungen zweiter Ordnung enthalten zwei willkürliche Konstanten a, b, haben also die Form

$$x = \xi(t, a, b),$$
$$y = \eta(t, a, b);$$

diese Kurven heissen die Extremalen des Integrals J. $P_1 P_2$ sei ein Extremalenbogen, auf dem der Parameter t von t_1 bis t_2 wächst. Damit er wirklich dem Integrale J einen extremen Wert erteile gegenüber allen anderen P_1 und P_2 verbindenden Kurven, ist weiter notwendig[2]), dass die Determinante

$$D(t_1, t) = \vartheta_1(t)\, \vartheta_2(t_1) - \vartheta_2(t)\, \vartheta_1(t_1) \neq 0$$

sei für

$$t_1 < t \leqq t_2,$$

wo

$$\vartheta_1(t) = \xi_t(t, a, b)\, \eta_a(t, a, b) - \eta_t(t, a, b)\, \xi_a(t, a, b),$$
$$\vartheta_2(t) = \xi_t(t, a, b)\, \eta_b(t, a, b) - \eta_t(t, a, b)\, \xi_b(t, a, b)$$

ist. Die Lösung

$$t = t_1'$$

der Gleichung

$$D(t_1, t) = 0,$$

---

[1]) Kneser, Lehrbuch der Variationsrechnung. Braunschweig 1900. § 8.
[2]) Kneser, L. d. V. § 31.

die von t_1 verschieden ist, bestimmt, wenn sie existiert, den zu P_1 konjugierten Punkt P_1'. Dieser Punkt ist der Schnittpunkt zweier unendlich benachbarter durch P_1 gehender Extremalen.

Die Gleichung der Extremalenschar durch einen festen Punkt enthält nur noch eine willkürliche Konstante a, hat also die Form

$$x = \xi(t, a),$$
$$y = \eta(t, a).$$

Damit ein Extremalenbogen P_1P_2, auf dem der Parameter t von t_1 bis t_2 wächst, das Integral J wirklich zum Extremum mache, muss die Funktionaldeterminante

$$\Delta(t, a) = \xi_t \eta_a - \eta_t \xi_a \neq 0$$

sein für

$$t_1 < t \leqq t_2.$$

Hat die Gleichung

$$\Delta = 0$$

eine von t_1 verschiedene Lösung t_1', so bestimmt diese den zu P_1 konjugierten Punkt P_1'. Dieser durchläuft, wenn a sich ändert, die Enveloppe der durch P_1 gehenden Extremalenschar. Der Kürze halber sei der Punkt P_1 mit 0 bezeichnet, 1, 2 seien zwei nicht singuläre Punkte der Enveloppe. Dann liefert der Extremalenbogen 02 kein Extremum des Integrals J mehr, denn es ist

$$\bar{J}_{01} + J_{12} = \bar{J}_{02};$$

die überstrichenen Integrale sind längs der Extremalen 01 und 02, J_{12} ist längs des Stückes 12 der Enveloppe zu bilden[1]).

Bei der nächst schwierigeren Aufgabe der Variationsrechnung, der isoperimetrischen Aufgabe, sind x und y als Funktionen des Parameters t so zu bestimmen, dass das Integral

$$J = \int F(x, y, x', y')\, dt$$

einen extremen Wert annimmt, während ein anderes Integral derselben Form

$$K = \int G(x, y, x', y')\, dt$$

einen vorgeschriebenen Wert hat. Wenn λ eine endliche, von Null verschiedene Konstante bedeutet und

$$F + \lambda G = H$$

---

[1]) Kneser, L. d. V. § 25.

gesetzt wird, so müssen hier x und y als Funktionen von t den Differentialgleichungen

$$H_x - \frac{dH_{x'}}{dt} = 0,$$

$$H_y - \frac{dH_{y'}}{dt} = 0$$

genügen.[1]) Die Lösungen dieser Differentialgleichungen zweiter Ordnung enthalten ausser den beiden Integrationskonstanten noch die isoperimetrische Konstante λ, haben also die Form

$$x = \xi(t, a, b, \lambda),$$
$$y = \eta(t, a, b, \lambda).$$

Diese Kurven heissen wieder die Extremalen der Variationsaufgabe.

Die Extremalenschar durch einen festen Punkt 0 enthält nur zwei Konstanten, ihre Gleichung kann daher geschrieben werden

$$x = \xi(t, a, b)$$
$$y = \eta(t, a, b).$$

Der Wert des isoperimetrischen Integrals K, vom festen Punkte mit dem Parameter t_1 an längs eines Extremalenbogens bis zu einem auf ihm liegenden Punkte P mit dem Parameter t ausgerechnet, sei

$$K = \omega(t, a, b).$$

Damit der Extremalenbogen $P_1 P_2$, auf dem der Parameter t wieder von t_1 bis t_2 wächst, wirklich das Integral J zum Extremum mache mit der isoperimetrischen Bedingung, muss die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \xi_t & \xi_a & \xi_b \\ \eta_t & \eta_a & \eta_b \\ \omega_t & \omega_a & \omega_b \end{vmatrix} \neq 0$$

sein für

$$t_1 < t \leqq t_2.$$

Eine von t_1 verschiedene Lösung t_1' der Gleichung

$$\Delta = 0$$

definiert den zu P_1 konjugierten Punkt P_1'.[2])

Das Aufhören des Extremums im Falle des Vorhandenseins konjugierter Punkte zum Ausgangspunkte zeigt sich bei der isoperimetrischen Aufgabe in folgender Weise: Man greift aus

---

[1]) Kneser, L. d. V. § 32.

[2]) ibd. § 36, 40.

der Doppelschar von Extremalen durch einen festen Punkt P_1 eine einfache so heraus, dass die Enveloppe dieser Schar jede Extremale in dem zu P_1 konjugierten Punkte berührt. Sind dann 1, 2 zwei nicht singuläre Punkte der Enveloppe, so bestehen die beiden Gleichungen

$$\bar{J}_{01} + J_{12} = \bar{J}_{02},$$
$$\bar{K}_{01} + K_{12} = \bar{K}_{02}.$$[1])

Bei der isoperimetrischen Aufgabe wird ein Beispiel dafür behandelt werden, dass die Extremalen nicht von einem festen Punkte, sondern von einer gegebenen Kurve $\mathfrak{C}$ ausgehen. Auch in diesem Falle erhalten wir eine Doppelschar von Extremalen, weil als neue notwendige Bedingung des Extremums die der transversalen Lage der Extremale zur Kurve $\mathfrak{C}$ hinzukommt[2]),

$$H_{x'}\,\delta x + H_{y'}\,\delta y \Big|^{\mathfrak{C}} = 0$$

und eine Beziehung zwischen den drei ursprünglich vorhandenen Konstanten a, b, λ festlegt. Die Gleichung der Doppelschar sei

$$x = \xi(t, a, b),$$
$$y = \eta(t, a, b),$$

ferner

$$K = \omega(t, a, b)$$

der Wert des isoperimetrischen Integrals, auf einer Extremalen von ihrem Schnittpunkte P_1 mit der Kurve $\mathfrak{C}$, dem der Parameterwert t_1 entspreche, bis zu einem beliebigen ihrer Punkte mit dem Parameterwerte t ausgerechnet. Damit ein Extremalenbogen P_1P_2, längs dessen der Parameter t von t_1 bis t_2 wächst, wirklich dem Integrale J einen extremen Wert erteile mit der isoperimetrischen Nebenbedingung, muss

$$\Delta = \begin{vmatrix} \xi_t & \xi_a & \xi_b \\ \eta_t & \eta_a & \eta_b \\ \omega_t & \omega_a & \omega_b \end{vmatrix} \neq 0$$

sein für

$$t_1 < t \leqq t_2.$$

Ist eine von t_1 verschiedene Lösung t_1' der Gleichung

$$\Delta = 0$$

vorhanden, so bestimmt sie den extremalen Brennpunkt P_1' der Kurve $\mathfrak{C}$.

---

[1]) Kneser, L. d. V. § 40.
[2]) ibd. § 39.

Man greift jetzt aus der Doppelschar transversaler Extremalen eine einfache so heraus, dass die Enveloppe dieser Schar jede Extremale in dem Brennpunkte der Kurve $\mathfrak{C}$ berührt. Es seien $0, \bar{0}$ zwei verschiedene Lagen des Punktes P_1 auf der Kurve $\mathfrak{C}$, 1, 2 zwei nicht singuläre Punkte der Enveloppe: dann drücken die beiden in diesem Falle bestehenden Gleichungen

$$\bar{J}_{01} + J_{12} = \bar{J}_{\bar{0}2},$$
$$\bar{K}_{01} + K_{12} = \bar{K}_{\bar{0}2}$$

das Aufhören des Extremums aus.[1])

Wir stellen uns nun die Aufgabe, diese allgemeinen Theorien an einer Reihe von Beispielen durchzuführen, bei denen die Extremalen durch elliptische Funktionen dargestellt werden.

Bei diesen Aufgaben tritt häufig der Jacobische Modul k als Scharparameter auf, so etwa in der Schar § 18

$$x = \frac{a}{\sqrt{2}}\, u - a\sqrt{2}\left(E(u) - k^2 \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u}\right) = \xi(u, k, a),$$

$$y = -akk'\sqrt{2}\,\frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u} \qquad = \eta(u, k, a),$$

$$s = \frac{a}{\sqrt{2}}\, u \qquad = \omega(u, k, a),$$

in der u, k, a als unabhängige Veränderliche angesehen werden. Zur Aufstellung der Funktionaldeterminante sind Differentiationen wie $\frac{\partial \operatorname{sn} u}{\partial k}$, $\frac{\partial E(u)}{\partial k}$ mit u und k als unabhängigen Veränderlichen auszuführen; wir wollen die hierher gehörigen Formeln zusammenstellen.

Bei Cayley[2]) finden sich die Formeln

$$\text{(a)} \quad \frac{\partial \operatorname{sn} u}{\partial k} = -\frac{k}{k'^2} \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u \int_0^u \operatorname{cn} u^2\, du + \frac{k}{k'^2} \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u^2,$$

$$\text{(b)} \quad \frac{\partial \operatorname{cn} u}{\partial k} = \frac{k}{k'^2} \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u \int_0^u \operatorname{cn} u^2\, du - \frac{k}{k'^2} \operatorname{sn} u^2 \operatorname{cn} u,$$

---

[1]) Kneser, L. d. V. § 40.

[2]) An elementary treatise on elliptic functions, Cambridge 1876, p. 101 f.

$$\text{(c)}\quad \frac{\partial\,\mathrm{dn}\,u}{\partial k} = \frac{k^3}{k'^2}\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\int_0^u \mathrm{cn}\,u^2\,du - \frac{k}{k'^2}\,\mathrm{sn}\,u^2\,\mathrm{dn}\,u;$$

nun ist

$$\mathrm{cn}\,u^2 = \frac{\mathrm{dn}\,u^2 - k'^2}{k^2},$$

führt man also die Jacobische Grösse

$$E(u) = \int_0^u \mathrm{dn}\,u^2\,du$$

ein, so wird

$$\text{I.}\quad \frac{\partial\,\mathrm{sn}\,u}{\partial k} = -\frac{1}{k\,k'^2}E(u)\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u + \frac{1}{k}u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u + \frac{k}{k'^2}\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u^2,$$

$$\text{II.}\quad \frac{\partial\,\mathrm{cn}\,u}{\partial k} = \frac{1}{k\,k'^2}E(u)\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u - \frac{1}{k}u\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u - \frac{k}{k'^2}\,\mathrm{sn}\,u^2\,\mathrm{cn}\,u,$$

$$\text{III.}\quad \frac{\partial\,\mathrm{dn}\,u}{\partial k} = \frac{k}{k'^2}E(u)\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u - k\,u\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u - \frac{k}{k'^2}\,\mathrm{sn}\,u^2\,\mathrm{dn}\,u.$$

Man kann zu diesen Formeln aber auch auf demselben Wege gelangen, den Halphen[1]) zur Berechnung der Ableitungen der Funktion $\wp u$ nach den Invarianten g_2, g_3 einschlägt.

Eine leichte Rechnung liefert für die Funktion

$$\mathrm{tn}\,u = \frac{\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{cn}\,u}$$

$$\text{IV.}\quad \frac{\partial\,\mathrm{tn}\,u}{\partial k} = \frac{-\frac{1}{k\,k'^2}E(u)\,\mathrm{dn}\,u + \frac{1}{k}u\,\mathrm{dn}\,u + \frac{k}{k'^2}\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{cn}\,u^2}.$$

Den Wert der Ableitung $\frac{\partial E(u)}{\partial k}$, den Cayley a. a. O. nicht angibt, bestimmen wir nach der Definition von $E(u)$, da die Differentiation nach k unter dem Integralzeichen zulässig ist, durch die Formel

$$\frac{\partial E(u)}{\partial k} = \int_0^u \frac{\partial}{\partial k}(\mathrm{dn}\,u^2)\,du = \int_0^u 2\,\mathrm{dn}\,u\,\frac{\partial\,\mathrm{dn}\,u}{\partial k}\,du = \frac{2k}{k'^2}\int_0^u E(u)\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u\,du$$

$$- 2k\int_0^u u\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u\,du - \frac{2k}{k'^2}\int_0^u \mathrm{sn}\,u^2\,\mathrm{dn}\,u^2\,du.$$

Hierfür kann man wegen

$$d(\mathrm{dn}\,u) = -k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,du,\quad k^2\,\mathrm{sn}\,u^2 = 1 - \mathrm{dn}\,u^2$$

[1]) Traité des fonctions elliptiques, Paris 1886. T. I, p. 291 ff.

schreiben

$$\frac{\partial E(u)}{\partial k} = -\frac{2}{k k'^2}\int_0^u E(u)\,\mathrm{dn}\,u\,d(\mathrm{dn}\,u) + \frac{2}{k}\int_0^u u\,\mathrm{dn}\,u\,d(\mathrm{dn}\,u)$$

$$-\frac{2}{k k'^2}\int_0^u (1-\mathrm{dn}\,u^2)\,\mathrm{dn}\,u^2\,du$$

Durch partielle Integration findet man

$$\frac{\partial E(u)}{\partial k} = -\frac{2}{k k'^2}\left[E(u)\cdot\frac{1}{2}\,\mathrm{dn}\,u^2 - \frac{1}{2}\int_0^u \mathrm{dn}\,u^4\,du\right] + \frac{2}{k}\left[u\cdot\frac{1}{2}\,\mathrm{dn}\,u^2\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\int_0^u \mathrm{dn}\,u^2\,du\right] - \frac{2}{k k'^2}\int_0^u \mathrm{dn}\,u^2\,du + \frac{2}{k k'^2}\int_0^u \mathrm{dn}\,u^4\,du,$$

$$\text{(1)}\qquad \frac{\partial E(u)}{\partial k} = -\frac{1}{k k'^2}E(u)\,\mathrm{dn}\,u^2 + \frac{1}{k}u\,\mathrm{dn}\,u^2 - \frac{2}{k}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{k'^2}\right)E(u)$$

$$+\frac{3}{k k'^2}\int_0^u \mathrm{dn}\,u^4\,du.$$

Zur Ausrechnung des letzten Integrals gehen wir von der Identität

$$\frac{d}{du}(\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u) = \frac{3}{k^2}\mathrm{dn}\,u^4 - \frac{2}{k^2}(1+k'^2)\,\mathrm{dn}\,u^2 + \frac{k'^2}{k^2}$$

aus, deren Integration zwischen den Grenzen 0 und 1 liefert

$$\text{(2)}\qquad \frac{3}{k k'^2}\int_0^u \mathrm{dn}\,u^4\,du = \frac{k}{k'^2}\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u + \frac{2}{k k'^2}(1+k'^2)E(u) - \frac{1}{k}u.$$

Die Einsetzung von (2) in (1) ergibt die gesuchte Ableitung

$$\text{V.}\qquad \frac{\partial E(u)}{\partial k} = -\frac{k}{k'^2}E(u)\,\mathrm{cn}\,u^2 - k\,u\,\mathrm{sn}\,u^2 + \frac{k}{k'^2}\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u.$$

Damit haben wir die Mittel in der Hand, die Diskussion der Funktionaldeterminante Δ bei den genannten Aufgaben der Variationsrechnung aufzunehmen.

Die vorliegende Arbeit, die diesen Gegenstand behandelt, ist aus einer am 27. Januar 1913 von der hohen philosophischen Fakultät der Universität Breslau gekrönten Preisschrift entstanden. Die Anregung zur Beschäftigung mit den Problemen der Variationsrechnung verdanke ich den Vorlesungen und Übungen von Herrn Geheimrat Kneser; es sei mir erlaubt, ihm auch an dieser Stelle hierfür meinen aufrichtigsten Dank auszusprechen.

I. Kapitel.

Enveloppen bei der einfachsten Aufgabe der Variationsrechnung.

I. Abschnitt: Probleme von der Form $\delta \int y^n \sqrt{1-p^2}\, dx = 0$.

§ 1. Die Extremalen.

Führt man in den Eulerschen Differentialgleichungen den Parameter

$$t = x$$

ein, so erhält man als notwendige Extremumsbedingungen die Differentialgleichungen

$$(E_1) \qquad f_x - \frac{d}{dx}(f - pf_p) = 0,$$

$$(E_2) \qquad f_y - \frac{df_p}{dx} = 0,$$

wenn

$$F(x, y, x', y')\, dt = f(x, y, p)\, dx, \quad p = \frac{y'}{x'} = \frac{dy}{dx}$$

gesetzt wird. Ist, wie in unserem Falle, wo

$$f = y^n \sqrt{1 - p^2},$$

der Integrand von x frei, so benutzt man (E_1) in der Form

$$f - pf_p = \text{const}$$

und erhält, wenn man die Konstante mit c bezeichnet, aus

$$f - pf_p = \frac{y^n}{\sqrt{1-p^2}} = c$$

als Differentialgleichung der Extremalenschar

$$(1) \qquad dx = \frac{c\, dy}{\sqrt{c^2 - y^{2n}}}\,^{1}).$$

§ 2. $n = 1$.

Dieser Fall[2]) führt auf trigonometrische Funktionen, mag aber wegen der Analogie zur folgenden Aufgabe mitbehandelt werden.

---

[1]) Bolza, Vorlesungen über Variationsrechnung, Leipzig 1909, p. 145, Aufgabe 12.

[2]) Kneser, L. d. V., Aufgabe III, §§ 9, 18.

Setzt man in § 1, (1) $n = 1$, so ergibt sich

$$dx = \frac{c\,dy}{\sqrt{c^2 - y^2}},$$

$$y = c \sin \frac{x - b}{c}.$$

Für die Extremalenschar durch den Koordinatenanfang als festen Punkt ist die zweite Integrationskonstante

$$b = 0,$$

ihre Gleichung ist also

(1) $$y = c \sin \frac{x}{c}.$$

Da x als Parameter eingeführt ist, vereinfacht sich die Determinante

$$\Delta = \xi_t \eta_a - \eta_t \xi_a$$

auf

$$\Delta = \frac{\partial y}{\partial c},$$

und man erhält

(2) $$\Delta = \sin \frac{x}{c} - \frac{x}{c} \cos \frac{x}{c}.$$

Auf einer Extremalen mit dem Parameter c ist also zu dem festen Punkte, dem Nullpunkte, der Punkt mit der Abszisse

(3) $$x = c\,T$$

konjugiert, wenn

(4) $$T = 4{,}4934..$$

die erste von Null verschiedene positive Lösung der Gleichung

(5) $$u = \operatorname{tg} u$$

ist. Eliminiert man c aus (1) und (3), und setzt man noch die trigonometrischen Funktionen des Arguments T

(6) $$\sin T = \frac{T}{\sqrt{1 + T^2}} = S, \quad \cos T = \frac{1}{\sqrt{1 + T^2}} = C,$$

so findet sich aus

$$y = \frac{x}{T} S$$

als die gesuchte Enveloppe die Gerade

(7) $$y = Cx.$$

Fig. 1 (Masseinheit 2 cm) zeigt drei Extremalen $\left(a = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ und die Enveloppe.

Das zum Extremum zu machende Integral hat, längs einer Extremalen vom Nullpunkte bis zu einem beliebigen Punkte 1 hin ausgerechnet, den Wert

$$\bar{J}_{01} = \int_0^1 y\sqrt{1-p^2}\,dx = \int_0^1 c\sin\frac{x}{c}\sqrt{1-\cos\frac{x}{c}^2}\,dx = c\int_0^1 \sin\frac{x}{c}^2\,dx,$$

$$\bar{J}_{01} = \frac{c}{2}\left(x_1 - c\sin\frac{x_1}{c}\cos\frac{x_1}{c}\right). \tag{8}$$

Ist speziell 1 der auf der betrachteten Extremale zum Nullpunkte konjugierte Punkt, so wird wegen (3)

$$\bar{J}_{01} = \frac{1}{2}\frac{x_1}{T}\left(x_1 - \frac{x_1}{T}\frac{T}{\sqrt{1+T^2}}\frac{1}{\sqrt{1+T^2}}\right) = \frac{1}{2}x_1^2\frac{C}{S}(1-C^2),$$

$$\bar{J}_{01} = \frac{1}{2}x_1^2\,SC, \tag{9}$$

entsprechend auf einer anderen Extremalen

$$\bar{J}_{02} = \frac{1}{2}x_2^2\,SC. \tag{10}$$

Für die Enveloppe ist nach (7)

$$p = \frac{\delta y}{\delta x} = C,$$

daher das längs der Enveloppe zwischen den Punkten 1 und 2 ausgerechnete Integral

$$J_{12} = \int_1^2 y\sqrt{1-p^2}\,dx = \int_1^2 Cx\sqrt{1-C^2}\,dx = \int_1^2 SCx\,dx,$$

$$J_{12} = \frac{1}{2}SC(x_2^2 - x_1^2). \tag{11}$$

Die Addition von (9) und (11) ergibt

$$\bar{J}_{01} + J_{12} = \bar{J}_{02},$$

der „Enveloppensatz“ ist bestätigt.

§ 3. $n = 2$.

Die Annahme $n = 2$ in § 1, (1) ergibt

$$dx = \frac{c\,dy}{\sqrt{c^2 - y^4}}.$$

Wir setzen, da man c positiv annehmen darf,

$$c = 2a^2$$

und substituieren in

$$dx = \frac{2a^2 dy}{\sqrt{4a^4 - y^4}} = \frac{2a^2\,dy}{\sqrt{(2a^2 - y^2)(2a^2 + y^2)}}$$

$$2a^2 - y^2 = 2a^2 z^2;$$

dann wird

$$\frac{dx}{a} = \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)\left(1-\frac{1}{2}z^2\right)}},$$

daher, wenn b die zweite Integrationskonstante bedeutet,

$$z = \operatorname{sn}\frac{x-b}{a},$$

$$y = a\sqrt{2}\,\operatorname{cn}\frac{x-b}{a}, \qquad k^2 = \frac{1}{2}.$$

Es handelt sich also um den harmonischen Fall der elliptischen Funktionen. Als Gleichung des einparametrigen Extremalenbüschels durch den Nullpunkt findet sich wegen

$$b = a \cdot K, \; K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin\varphi^2}}$$

$$y = a\sqrt{2}\,\operatorname{cn}\left(\frac{x}{a} - K\right);$$

sie kann wegen

$$\operatorname{cn}(u-K) = \frac{k'\operatorname{sn}u}{\operatorname{dn}u},$$

$$k' = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

geschrieben werden

$$(1) \qquad y = a\,\frac{\operatorname{sn}\frac{x}{a}}{\operatorname{dn}\frac{x}{a}}.$$

Hieraus ergibt sich wegen

$$d\operatorname{sn}u = \operatorname{cn}u\operatorname{dn}u, \quad d\operatorname{dn}u = -k^2\operatorname{sn}u\operatorname{cn}u$$

$$\Delta = \frac{\partial y}{\partial a} = \frac{\left(\operatorname{sn}\frac{x}{a} - \frac{x}{a}\operatorname{cn}\frac{x}{a}\operatorname{dn}\frac{x}{a}\right)\operatorname{dn}\frac{x}{a} - a\operatorname{sn}\frac{x}{a}\cdot -k^2\operatorname{sn}\frac{x}{a}\operatorname{cn}\frac{x}{a}\cdot -\frac{x}{a^2}}{\operatorname{dn}\frac{x}{a}^2}$$

$$= \frac{\operatorname{sn}\frac{x}{a}\operatorname{dn}\frac{x}{a} - \frac{x}{a}\operatorname{cn}\frac{x}{a}\left(\operatorname{dn}\frac{x}{a}^2 + k^2\operatorname{sn}\frac{x}{a}^2\right)}{\operatorname{dn}\frac{x}{a}^2},$$

$$(2) \qquad \Delta = \frac{\operatorname{sn}\frac{x}{a}\operatorname{dn}\frac{x}{a} - \frac{x}{a}\operatorname{cn}\frac{x}{a}}{\operatorname{dn}\frac{x}{a}^2}.$$

Zur Bestimmung des zum Nullpunkte auf einer Extremalen konjugierten Punktes folgt daraus die Gleichung

$$(3) \qquad u - \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u} = 0, \quad u = \frac{x}{a}.$$

Bezeichnet man die linke Seite der Gleichung (3) mit $\varphi(u)$, so ist

$$\varphi'(u) = 1 - \frac{(\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u^2 - k^2 \operatorname{sn} u^2 \operatorname{cn} u) \operatorname{cn} u + \operatorname{sn} u^2 \operatorname{dn} u^2}{\operatorname{cn} u^2}$$

$$= \frac{\operatorname{cn} u^2 - \operatorname{dn} u^2 + \frac{1}{2} \operatorname{sn} u^2 \operatorname{cn} u^2}{\operatorname{cn} u^2}$$

$$= \frac{1 - \operatorname{sn} u^2 - 1 + \frac{1}{2} \operatorname{sn} u^2 + \frac{1}{2} \operatorname{sn} u^2 - \frac{1}{2} \operatorname{sn} u^4}{\operatorname{cn} u^2},$$

$$(4) \qquad \varphi'(u) = -\frac{1}{2} \frac{\operatorname{sn} u^4}{\operatorname{cn} u^2}.$$

$\varphi'(u)$ verschwindet nur für die Werte

$$u = 2n\,K,$$

wenn n eine ganze Zahl ist; da aber auch

$$\varphi''(2n\,K) = 0, \quad \varphi'''(2n\,K) = 0, \quad \varphi^{\mathrm{IV}}(2n\,K) = 0,$$

hingegen

$$\varphi^{\mathrm{V}}(2n\,K) \neq 0,$$

so liefert der Wert $u = 2n\,K$ für die Kurve $\eta = \varphi(u)$ kein Extremum, sondern einen Wendepunkt vierter Ordnung. Mithin ist nach (4) $\varphi(u)$ eine ständig fallende Funktion von u.

Man hat

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(K - 0) = -\infty,$$

und die Stelle $u = K$ ist, wenn man von $u = 0$ ausgeht, der erste reelle Pol der Funktion $\varphi(u)$. Weiter ist

$$\varphi(K + 0) = +\infty, \quad \varphi(2\,K) = 2\,K,$$
$$\varphi(3\,K - 0) = -\infty, \quad \varphi(3\,K + 0) = +\infty \text{ usw.}$$

Die Stelle $u = 3\,K$ ist der zweite reelle Pol der Funktion φu. Die erste positive reelle Nullstelle v der Funktion $\varphi(u)$ liegt hiernach im Intervalle

$$2\,K < u < 3\,K.$$

Sie hat ungefähr den Wert

$$(4) \qquad v = 5{,}37\ldots,$$

wie man aus der folgenden kleinen Tabelle ersieht, für die die numerischen Werte aus der Funktionentafel von Jahnke-Emde[1]) entnommen sind:

[1]) Leipzig 1909.

u	$\log u$	$\log \frac{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{cn}\,u}$
5,1961	0,71569	0,43551
5,3655	0,72961	0,70584
5,3716	0,73011	0,71956
5,3777	0,73060	0,73372
5,4390	0,73552	0,90808

In Fig. 2 (M.E. 1 cm) sind die Kurven

$$\eta = u, \quad \eta = \frac{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{cn}\,u}$$

gezeichnet.

Auf einer Extremalen mit dem Parameter a ist also zum Nullpunkte der Punkt mit der Abszisse

(5) $$x = av$$

konjugiert, wo v die Gleichung (3) identisch befriedigt und für alle Extremalen denselben Wert (4) hat.

Setzt man die elliptischen Funktionen des Arguments v

(6) $$\mathrm{sn}\,v = S, \quad \mathrm{cn}\,v = C, \quad \mathrm{dn}\,v = D,$$

sodass man identisch

(7) $$v = \frac{SD}{C}$$

hat, dann bekommt man durch Elimination von a aus

(5) $$a = \frac{x}{v} = \frac{Cx}{SD}$$

und (1) als Gleichung der Enveloppe der Schar (1)

$$y = \frac{Cx}{SD} \cdot \frac{S}{D},$$

man findet also die gerade Linie

(8) $$y = \frac{C}{D^2}\, x.$$

Fig. 3 (M.E. 2 cm) zeigt drei Extremalen $\left(a = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ und die Enveloppe.

Das zum Extremum zu machende Integral hat, längs einer Extremalen vom Nullpunkte bis zu einem beliebigen Punkte 1 ausgerechnet, wegen

$$1 - p^2 = 1 - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 - 2\,\mathrm{sn}\left(\frac{x}{a} - K\right)^2 \mathrm{dn}\left(\frac{x}{a} - K\right)^2$$

$$= 1 - 2\,\mathrm{sn}\left(\frac{x}{a} - K\right)^2 + \mathrm{sn}\left(\frac{x}{a} - K\right)^4 = \mathrm{cn}\left(\frac{x}{a} - K\right)^4$$

den Wert

$$(9)\quad \bar{J}_{01} = \int_0^1 2\,a^2 \operatorname{cn}\left(\frac{x}{a} - K\right)^4 dx = 2a^3 \int_0^1 \operatorname{cn}(u-K)^4\,du,\ \frac{x}{a} = u.$$

Wie schon in der Einleitung benutzt wurde, ist

$$\frac{d}{dv}(\operatorname{sn}v\,\operatorname{cn}v\,\operatorname{dn}v) = \frac{3}{k^2}\operatorname{dn}v^4 - \frac{2}{k^2}(1+k'^2)\operatorname{dn}v^2 + \frac{k'^2}{k^2}$$

speziell für den Modul $\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$(10)\qquad \frac{d}{dv}(\operatorname{sn}v\,\operatorname{cn}v\,\operatorname{dn}v) = \frac{3}{2}\operatorname{cn}v^4 - \frac{1}{2}.$$

Mit Hülfe von (10) geht (9) über in

$$(11)\quad \bar{J}_{01} = 2\,a^3 \int_0^1 \left[\frac{2}{3}\,d\Big(\operatorname{sn}(u-K)\operatorname{cn}(u-K)\operatorname{dn}(u-K)\Big) + \frac{1}{3}\,du\right]$$

$$= \frac{4}{3}\,a^3 \operatorname{sn}(u-K)\,\operatorname{cn}(u-K)\operatorname{dn}(u-K)\Big|_0^1 + \frac{2}{3}\,a^3\,u\Big|_0^1.$$

Wegen

$$\operatorname{sn}(u-K) = -\frac{\operatorname{cn}u}{\operatorname{dn}u},\ \operatorname{cn}(u-K) = k'\frac{\operatorname{sn}u}{\operatorname{dn}u},\ \operatorname{dn}(u-K) = \frac{k'}{\operatorname{dn}u},$$

$$\operatorname{sn}(u-K)\operatorname{cn}(u-K)\operatorname{dn}(u-K) = -\frac{1}{2}\frac{\operatorname{sn}u\,\operatorname{cn}u}{\operatorname{dn}u^3}$$

wird $\bar{J}_{01}$, weil die Einsetzung der unteren Grenze 0 in (11) 0 liefert,

$$(12)\qquad \bar{J}_{01} = \frac{2}{3}\,a^3\left(\frac{x_1}{a} - \frac{\operatorname{sn}\frac{x_1}{a}\operatorname{cn}\frac{x_1}{a}}{\operatorname{dn}\frac{x_1}{a}^3}\right).$$

Ist speziell 1 der konjugierte Punkt zum Nullpunkte, also nach (5), (6), (7)

$$\frac{x_1}{a} = \frac{SD}{C},\ \operatorname{sn}\frac{x_1}{a} = S,\ \operatorname{cn}\frac{x_1}{a} = C,\ \operatorname{dn}\frac{x_1}{a} = \mathrm{D},\ a = \frac{x_1\,C}{SD}$$

so ist

$$\bar{J}_{01} = \frac{2}{3}\,x_1^3\,\frac{C^2}{S^2\,D^6}(D^4 - C^2),$$

und weil man für den Modul $\frac{1}{\sqrt{2}}$ leicht

$$\operatorname{dn}u^4 - \operatorname{cn}u^2 = \frac{1}{4}\operatorname{sn}u^4$$

findet,

(13) $$\bar{J}_{01} = \frac{1}{6} x_1^3 \frac{S^2 C^2}{D^6}.$$

Bedeutet 2 den Berührungspunkt der Enveloppe mit einer andern Extremalen, so ist

(14) $$\bar{J}_{02} = \frac{1}{6} x_2^3 \frac{S^2 C^2}{D^6}.$$

Für die Enveloppe gilt

$$p = \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{C}{D^2}; \quad 1 - p^2 = 1 - \frac{C^2}{D^4} = \frac{1}{4} \frac{S^4}{D^4},$$

also ist das zwischen den Punkten 1 und 2 der Enveloppe ausgerechnete Integral

$$J_{12} = \int_1^2 y^2 \sqrt{1 - p^2}\, dx = \int_1^2 \frac{C^2}{D^4} x^2 \cdot \frac{1}{2} \frac{S^2}{D^2}\, dx,$$

(15) $$J_{12} = \frac{1}{6} (x_2^3 - x_1^3) \frac{S^2 C^2}{D^6}.$$

Die Gleichungen (13), (14), (15) zeigen die „Evoluteneigenschaft“ der Enveloppe

$$J_{01} + J_{12} = \bar{J}_{02}.$$

Die Gleichung (3) für den konjugierten Punkt gibt Bolza[1]) bei einer isoperimetrischen Aufgabe. In der Tat sind diese und das vorliegende Variationsproblem nahe verwandt. Behandelt man nämlich die Aufgabe:

Eine Kurve von gegebener Länge zu ziehen, welche von einem gegebenen Punkte 0 aus geht, auf einer festen, durch diesen gehenden Geraden endigt, ohne dass die Lage des Endpunktes vorgeschrieben wäre, und welche mit der Geraden als Rotationsachse einen extremen Rotationskörper erzeugt, mit dem Eulerschen Kunstgriffe[2]), so kommt man in der (s, y)-Ebene, wenn s die Bogenlänge,

$$y = 0$$

die feste Gerade ist, zu der Quadratur

$$ds = \frac{c\, dy}{\sqrt{c^2 - y^4}},$$

wie wir sie im Anfange des Paragraphen zwischen x und y erhalten hatten. Wir kommen auf die erwähnte isoperimetrische Aufgabe später (§ 18) zurück.

---

[1]) V. ü. V. S. 540 f., Aufg. 34.

[2]) Kneser, L. d. V. § 9, Aufg. III, IV.

Ist u die Abszisse des Meridians, so ist

$$du = \sqrt{1-p^2}\,dx = \operatorname{cn}\left(\frac{x}{a}-K\right)^2 dx = \left[2\operatorname{dn}\left(\frac{x}{a}-K\right)^2 - 1\right]dx,$$

$$u = \int_0^x \left[2\operatorname{dn}\left(\frac{x}{a}-K\right)^2 - 1\right]dx = 2a\left[E\left(\frac{x}{a}-K\right)+E\right]-x,$$

die gesuchte Kurve kann also mit der Bogenlänge als Parameter in der Form

$$u = 2a\left[E\left(\frac{x}{a}-K\right)+E\right]-x,$$

$$y = a\frac{\operatorname{sn}\frac{x}{a}}{\operatorname{dn}\frac{x}{a}} \tag{16}$$

dargestellt werden.

Wo der Meridian die u-Achse schneidet, d. h. für

$$x = 2naK, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

ist

$$\frac{du}{dy} = \frac{d^2u}{dy^2} = 0, \quad \frac{d^3u}{dy^3} \neq 0,$$

die Kurve (16) hat also an diesen Stellen einen Wendepunkt zweiter Ordnung mit der Parallelen zur y-Achse als Wendetangente.

Die Kurven (16) haben das Aussehen der Kurven in Fig. 19.

§ 4. $n = 3$.

Im Falle $n = 3$ wird § 1, (1), wenn man c durch c^3 ersetzt,

$$dx = \frac{c^3\,dy}{\sqrt{c^6-y^6}}.$$

Die Erledigung der Aufgabe durch Jacobis elliptische Funktionen führt zu verwickelter Rechnung; diese wird vermieden, wenn man von der Weierstrass'schen $\wp$-Funktion mit negativer Diskriminante[1]) Gebrauch macht. Setzt man

$$y = \frac{c}{\sqrt[3]{2}}\,w^{-\frac{1}{2}}, \quad dy = -\frac{1}{2}\frac{c}{\sqrt[3]{2}}\,w^{-\frac{3}{2}}\,dw, \quad c^6 - y^6 = c^6\left(1-\frac{1}{4}w^{-3}\right),$$

[1]) Halphen, F. e., T. I p. 69 ff.; Greenhill, The applications of elliptic functions, London 1892, p. 50 f.

so wird

$$dx = \frac{c\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\,dw}{\sqrt{4w^3 - 1}},$$

also, wenn b eine Integrationskonstante ist,

$$w = \wp\left(\frac{\sqrt[3]{2}\,x - b}{c}\right).$$

Man hat

$$e_1 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}\right)\sqrt[3]{\frac{1}{4}},\ e_2 = \sqrt[3]{\frac{1}{4}},\ e_3 = \left(-\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}\right)\sqrt[3]{\frac{1}{4}},$$

und die Invarianten der elliptischen Funktion sind

$$g_2 = 0,\ g_3 = 1:$$

es handelt sich um den äquianharmonischen Fall der elliptischen Funktionen, mit dem Werte der Diskriminante

$$g_2^3 - 27\,g_3^2 = -27.$$

Für y folgt

$$y = c\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\,w^{-\frac{1}{2}} = \frac{c\sqrt[3]{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\wp\left(\frac{\sqrt[3]{2}\,x - b}{c}\right)}},$$

und sollen die Extremalen alle durch den Nullpunkt gehen, so muss

$$\frac{1}{\sqrt{\wp\frac{b}{c}}} = 0,\ \frac{b}{c} \equiv 0$$

sein nach den Perioden. Die gesuchte einparametrige durch den Nullpunkt gehende Extremalenschar ist also

$$(1) \qquad y = \frac{c}{\sqrt[3]{2}}\,\frac{1}{\sqrt{\wp\frac{\sqrt[3]{2}\,x}{c}}}.$$

Hat man der hier auftretenden Wurzel für $x = +0$ ein bestimmtes Vorzeichen, etwa das positive, gegeben, so behält sie es für alle reellen Werte des Arguments $\frac{\sqrt[3]{2}\,x}{c}$, die kleiner als die reelle Periode 2ω sind, denn der Radikand verschwindet

niemals, da der kleinste Wert, den die $\wp$-Funktion mit negativer Diskriminante für reelle Argumente annimmt,

$$e_2 = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$$

ist[1]). Für

$$\frac{\sqrt[3]{2}\,x}{c} = 2\omega$$

wird

$$\wp\frac{\sqrt[3]{2}\,x}{c} = \infty, \quad \frac{1}{\wp\frac{\sqrt[3]{2}\,x}{c}} = 0,$$

und y wechselt sein Zeichen, es bleibt negativ bis zur Stelle

$$\frac{\sqrt[3]{2}\,x}{c} = 4\omega,$$

um dort wieder positiv zu werden u. s. f. Für alle reellen Werte von x bleibt y endlich. Die Extremalen sind also wieder wellenförmige Kurven.

Die Determinante Δ ist

$$\Delta = \frac{\partial y}{\partial c} = \frac{1}{2y}\frac{\partial (y^2)}{\partial c},$$

$$\Delta = \frac{1}{2\sqrt[3]{2}}\,\frac{2\wp u + u\wp' u}{\wp u^{\frac{3}{2}}}. \tag{2}$$

Da

$$\lim_{u=4m\omega}\frac{\wp' u}{\wp u^{\frac{3}{2}}} = -2, \quad \lim_{u=(4m+2)\omega}\frac{\wp' u}{\wp u^{\frac{3}{2}}} = +2$$

ist, wenn m eine ganze Zahl bedeutet, hat man

$$\Delta(4m\omega) = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\cdot 4m\omega, \quad \Delta\left[(4m+2)\omega\right] = +\frac{1}{\sqrt[3]{2}}(4m+2)\omega,$$

sodass ausser dem Werte $u = 0$ die Pole des Nenners von Δ keine Nullstellen von Δ sind. Die Wurzeln der Determinante sind also nur die ihres Zählers, wenn solche vorhanden sind; der konjugierte Punkt zum Nullpunkte ist mithin auf jeder Extremalen durch die Gleichung

$$u + 2\frac{\wp u}{\wp' u} = 0 \tag{3}$$

[1]) Halphen, F. e., T. I p. 70.

bestimmt, denn $\wp u$ und $\wp' u$ können wegen ihrer Beziehung

$$\wp' u^2 = 4\,\wp u^3 - 1$$ [1])

nie gleichzeitig verschwinden. Bezeichnet man die linke Seite der Gleichung (3) mit $\varphi(u)$, so ist

$$\varphi'(u) = 1 + 2\,\frac{\wp' u^2 - \wp u\,\wp'' u}{\wp' u^2} = \frac{3\,\wp' u^2 - 2\,\wp u\,\wp'' u}{\wp' u^2}$$

und, da

$$\wp' u^2 = 4\,\wp u^3 - 1\,,\quad \wp'' u = 6\,\wp u^2$$

ist,

$$\varphi'(u) = -\frac{3}{\wp' u^2}. \tag{4}$$

Die Funktion $\varphi'(u)$ ist hiernach negativ ausser an den Stellen

$$u = 2\,m\omega,\quad m = 1, 2, 3, \ldots,$$

wo sie den Wert 0 hat; wegen

$$\lim_{u = 2m\omega} \wp' u^2 = \frac{4}{(u - 2\,m\omega)^6}$$

ist an diesen Stellen aber auch

$$\varphi''(u) = 0,\ \varphi'''(u) = 0,\ \ldots,\ \varphi^{\mathrm{VI}}(u) = 0,$$

hingegen

$$\varphi^{\mathrm{VII}}(u) \neq 0,$$

die Kurve $\eta = \varphi(u)$ besitzt also für $u = 2\,m\omega$ einen Wendepunkt von der sechsten Ordnung, und $\varphi(u)$ ist mithin eine beständig abnehmende Funktion von u. Nun ist

$$\varphi(0) = 0,$$
$$\varphi(\omega - 0) = -\infty,\quad \varphi(\omega + 0) = +\infty$$

(denn $\wp' u$ geht an dieser Stelle durch 0 und wechselt dabei sein Zeichen),

$$\varphi(2\,\omega) = 2\,\omega > 0,$$
$$\varphi(3\,\omega - 0) = -\infty:$$

Die erste positive reelle Nullstelle v der Funktion $\varphi(u)$ liegt also zwischen 2ω und 3ω. Ihr Wert ist

$$v = 4{,}47\ldots, \tag{5}$$

wie mit Hülfe der in den Jahnke-Emdeschen Funktionentafeln enthaltenen Tabelle für die elliptischen Funktionen im äquianharmonischen Falle

[1]) Es ist immer $\wp' u^2 = (\wp' u)^2$ zu lesen und analog in ähnlichen Fällen.

$g_2 = 0,\ g_3 = 1,\ \Delta = -27,\ \omega = 1{,}52995\ldots$[1])
gefunden wird. Man hat nämlich die beiden Wertsysteme

u	$\log u$	$\log\left(-2\frac{\wp u}{\wp' u}\right)$
4,46235	0,647551	0,622387
4,47085	0,650390	0,651721

Fig. 4 (M. E. 1 cm) zeigt einen Teil der Kurve

$$\eta = -2\frac{\wp u}{\wp' u}$$

und ihren Schnitt mit der Kurve

$$\eta = u.$$

Die Abszisse des zum Nullpunkte konjugierten Punktes ist auf einer Extremalen mit dem Parameter c nach (5) durch

(6) $$x = \frac{cv}{\sqrt[3]{2}}$$

gegeben. Im konjugierten Punkte ist also stets

$$c = \frac{\sqrt[3]{2}\,x}{v};$$

bezeichnet man die zu dem für alle Extremalen konstanten Argument v gehörigen elliptischen Funktionen kurz mit $\wp$, $\wp'$,

$$\wp v = \wp,\quad \wp' v = \wp',$$

sodass identisch gilt

$$v = -2\frac{\wp}{\wp'},$$

so folgt wegen

(7) $$c = -\frac{\sqrt[3]{2}}{2}\,x\,\frac{\wp'}{\wp}$$

aus (1) durch Elimination von c als Gleichung der Enveloppe der Schar (1)

(8) $$y = -\frac{1}{2}\,x\,\frac{\wp'}{\wp\sqrt{\wp}}.$$

Die Enveloppe ist hiernach wieder eine gerade Linie durch den Nullpunkt $\left(\text{Fig. 5; M.E. 2 cm, } c = \sqrt[3]{2}, \frac{\sqrt[3]{2}}{2}, \frac{\sqrt[3]{2}}{3}\right)$.

[1]) das. p. 72 ff.

Da nach den Gleichungen zur Bestimmung der Extremalen in § 1

$$\frac{y^3}{c^3} = \sqrt{1-p^2}$$

ist (denn es ist bei der vorliegenden Aufgabe c durch c^3 ersetzt), so hat man nach § 1 (1) mit den bei den beiden vorigen Aufgaben angewandten Bezeichnungen

$$\bar{J}_{01} = \int_0^1 y^3 \sqrt{1-p^2}\, dx = \int_0^1 y^3 \cdot \frac{y^3}{c^3} \frac{c^3 dy}{\sqrt{c^6-y^6}} = \int_0^1 \frac{y^6 dy}{\sqrt{c^6-y^6}}.$$

Führt man wieder

$$y = \frac{c}{\sqrt[3]{2}} w^{-\frac{1}{2}}$$

ein, so wird

$$\bar{J}_{01} = -\int_\infty^w \frac{c^4}{4\sqrt[3]{2}} \frac{dw}{w^3\sqrt{4w^3-1}},$$

wo in dem letzten Integrale ∞, w die wirklichen Werte der Integrationsgrenzen sind, während die Symbole 0, 1 in den früheren Integralen die Punkte andeuten, zwischen denen längs der Extremalen zu integrieren ist. Man hat also

$$\bar{J}_{01} = \frac{c^4}{4\sqrt[3]{2}} \int_w^\infty \frac{dw}{w^3\sqrt{4w^3-1}} = \frac{c^4}{4\sqrt[3]{2}} \int_u^0 \frac{du}{\wp u^3}.$$

Das letzte Integral ist pseudoelliptisch, wie man leicht erkennt, wenn man es in der algebraischen Form ausrechnet[1]). Die Identität

$$\frac{d}{dw}\frac{\sqrt{4w^3-1}}{w^2} = -\frac{2}{\sqrt{4w^3-1}} + \frac{2}{w^3\sqrt{4w^3-1}}$$

gibt, zwischen den Grenzen w und ∞ integriert,

$$\int_w^\infty \frac{2\,dw}{w^3\sqrt{4w^3-1}} = -\frac{\sqrt{4w^3-1}}{w^2} + \int_w^\infty \frac{2\,dw}{\sqrt{4w^3-1}}.$$

Führt man jetzt

$$w = \wp u = \wp \frac{\sqrt[3]{2}\, x}{c}$$

[1]) Greenhill, E. F., p. 253, example 7.

ein, so ist die negative Quadratwurzel

$$-\sqrt{4w^3-1} = \wp' u,$$

$$\int_w^\infty \frac{2\,dw}{\sqrt{4w^3-1}} = 2\int_0^u du = 2u,$$

folglich

$$\bar{J}_{01} = \frac{c^4}{\sqrt[3]{4\sqrt{2}}}\left(u + \frac{1}{2}\frac{\wp' u}{\wp u^2}\right). \tag{9}$$

Ist speziell 1 der zu 0 konjugierte Punkt, also nach (7)

$$u = v,\ \wp u = \wp,\ \wp' u = \wp',\ c = -\frac{\sqrt[3]{2}}{2}x_1\frac{\wp'}{\wp},\ v = -2\frac{\wp}{\wp'},$$

so wird

$$\bar{J}_{01} = \frac{1}{32}x_1^4\frac{\wp'^4}{\wp^4}\left(-2\frac{\wp}{\wp'}+\frac{1}{2}\frac{\wp'}{\wp^2}\right) = \frac{1}{64}x_1^4\frac{\wp'^3}{\wp^6}(\wp'^2-4\wp^3),$$

$$\bar{J}_{01} = -\frac{1}{64}x_1^4\frac{\wp'^3}{\wp^6}. \tag{10}$$

Längs einer andern Extremale ist

$$\bar{J}_{02} = -\frac{1}{64}x_2^4\frac{\wp'^3}{\wp^6}. \tag{11}$$

Für die Enveloppe gilt nach (8)

$$p = \frac{\delta y}{\delta x} = -\frac{1}{2}\frac{\wp'}{\wp\sqrt{\wp}},\ 1-p^2 = 1-\frac{1}{4}\frac{\wp'^2}{\wp^3} = \frac{1}{4\wp^3},$$

also ist das längs der Enveloppe zwischen den Punkten 1 und 2 ausgerechnete Integral

$$J_{12} = -\frac{1}{16}\frac{\wp'^3}{\wp^6}\int_1^2 x^3\,dx = -\frac{1}{64}(x_2^4-x_1^4), \tag{12}$$

und die Gleichungen (10), (11), (12) besagen

$$\bar{J}_{01} + J_{12} = \bar{J}_{02}.$$

II. Abschnitt.

Probleme von der Form $\delta\int\sqrt{U+h}\,ds = 0$, $U = \pm y^n$.

§. 5. Die Extremalen.

Die Eulersche Differentialgleichung (E_1) liefert bei

$$\delta\int\sqrt{h+\varepsilon y^n}\sqrt{1+p^2}\,dx = 0,\quad \varepsilon = \pm 1,$$

$$f - pf_p = \sqrt{h+\varepsilon y^n}\frac{1}{\sqrt{1+p^2}} = \text{const} = c,$$

also ist

$$(1) \qquad dx = \frac{c\,dy}{\sqrt{\varepsilon y^n + h - c^2}}$$

die Differentialgleichung der Extremalen.

Für $n = 1$ erhält man die Wurfparabeln, der von Kober[1]) behandelte Fall $n = -2$ führt auf zentrale Kegelschnitte.

Ich will hier die Fälle $n = +2, +4, +6, \varepsilon = -1$ durchrechnen.

§ 6. $n = +2$, $h > 0$.

Die allgemeine Gleichung § 5 (1) wird

$$dx = \frac{c\,dy}{\sqrt{h - c^2 - y^2}} = \frac{c\,d\frac{y}{\sqrt{h-c^2}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{y}{\sqrt{h-c^2}}\right)^2}}$$

bei der Annahme

$$h > c^2.$$

Die zweiparametrige Extremalenschar ist

$$\frac{y}{\sqrt{h-c^2}} = \sin\frac{x-b}{c},$$

wenn b Integrationskonstante ist, also die einparametrige durch den Nullpunkt

$$(1a) \qquad y = \sqrt{h-c^2}\sin\frac{x}{c}.$$

Von jetzt an machen wir von der Darstellung der Kurven in Parameterform Gebrauch und schreiben also statt (1a)

$$(1) \qquad \begin{aligned} x &= cu &&= \xi(u, c), \\ y &= \sqrt{h-c^2}\,\sin u &&= \eta(u, c). \end{aligned}$$

Alle Extremalen liegen zwischen den Geraden

$$y = \pm\sqrt{h},$$

den „Grenzkurven“[2]) des Problems.

Für die Funktionaldeterminante findet man

$$(2) \qquad \Delta = -\frac{1}{\sqrt{h-c^2}}\left[c^2\sin u + (h-c^2)\,u\cos u\right].$$

---

[1]) Journal für Mathematik, Bd. 140, p. 235 ff.

[2]) Kober, Konjugierte kinetische Brennpunkte, Inauguraldissertation Breslau 1910, p. 17.

Weil

$$\Delta\left[\frac{\pi}{2}(m+1)\right] \neq 0$$

ist, wenn m eine ganze Zahl bedeutet, kann die Gleichung zur Bestimmung des zum Nullpunkte konjugierten Punktes auf einer Extremalen mit dem Parameter c geschrieben werden

$$c^2(\operatorname{tg} u - u) + hu = 0. \tag{3}$$

Wird die linke Seite von (3) mit $\varphi(u)$ bezeichnet, so ist ihre Ableitung

$$\varphi'(u) = c^2 \operatorname{tg} u^2 + h$$

stets positiv, $\varphi(u)$ also eine ständig wachsende Funktion. Nun ist

$$\varphi(0) = 0, \varphi\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = +\infty, \varphi\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) = -\infty, \varphi(\pi) = (h - c^2)\pi > 0,$$

und der Wert $u = \frac{\pi}{2}$ ist der erste Pol der Funktion $\varphi(u)$ in dem betrachteten Intervalle. Daher liegt die erste auf $u = 0$ folgende Nullstelle der Funktion $\varphi(u)$ im Intervalle

$$\frac{\pi}{2} < u < \pi: \tag{4}$$

auf allen Extremalen ist ein zum Nullpunkte konjugierter Punkt vorhanden; der zu ihm gehörige Parameterwert

$$u = v \tag{5}$$

ist aber nicht mehr für alle Extremalen konstant, sondern, wie (3) lehrt, von c^2 abhängig.

Die Gleichung (3) zeigt, dass im konjugierten Punkte

$$c = \sqrt{h}\sqrt{\frac{u}{u - \operatorname{tg} u}} \tag{6}$$

ist; setzt man diesen Ausdruck in die Gleichung (1a) ein, so gelangt man zur Parameterdarstellung der Enveloppe der Schar (1a)

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{h}\sqrt{\frac{u}{u - \operatorname{tg} u}}\, u, \\ y &= \sqrt{h}\sqrt{\frac{-\operatorname{tg} u}{u - \operatorname{tg} u}} \sin u. \end{aligned} \tag{7}$$

Der Parameter u sei positiv: dann existieren reelle Punkte der Enveloppe nur für die Werte von u, für welche

$$u - \operatorname{tg} u \geqq 0, \ \operatorname{tg} u \leqq 0 \tag{8}$$

ist. Dies gilt für alle Werte (4) von u, daher hat man in (7)

den Parameter u das Intervall (4) durchlaufen zu lassen. In diesem wächst $\frac{u}{u - \operatorname{tg} u}$ von 0 bis 1, während $\frac{-\operatorname{tg} u}{u - \operatorname{tg} u}$ von 1 bis 0 abnimmt; den Wurzeln in (7) ist das positive Vorzeichen zu geben, da dem zwischen $\frac{\pi}{2}$ und π gelegenen zum konjugierten Punkte gehörigen Parameterwert v ein positiver Wert der Ordinate (1a) entspricht. x wächst von 0 bis $\sqrt{h}\,\pi$, während y von $\sqrt{h}$ bis 0 abnimmt: Die Enveloppe verläuft ganz im Endlichen.

Die Richtung der Extremalen ist nach (1) durch die Gleichungen

$$\frac{dx}{du} = c,$$

$$\frac{dy}{du} = \sqrt{h - c^2}\,\cos u,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{h - c^2}}{c}\cos u$$

gegeben. Durch Einsetzung des Wertes (6) von c findet man hieraus als Richtung der Enveloppe

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \sqrt{\frac{-\operatorname{tg} u}{u}}\cos u,$$

$$\left.\frac{\delta y}{\delta x}\right|^{u=\frac{\pi}{2}} = \left.\frac{\delta y}{\delta x}\right|^{u=\pi} = 0:$$

Die Enveloppe berührt die Grenzkurve

$$y = \sqrt{h}$$

und die x-Achse.

Fig. 6 (M.E. 2 cm) zeigt drei Extremalen ($h = 5$; $c = 1, 2, 2{,}1$) und die Enveloppe.

§ 7. $n = 4$, $h > 0$.

Aus § 5 (1) erhält man

$$dx = \frac{c\,dy}{\sqrt{h - c^2 - y^4}} = \frac{c\,dy}{\sqrt{(\sqrt{h - c^2} - y^2)(\sqrt{h - c^2} + y^2)}}$$

bei der Annahme

$$h > c^2.$$

Dieses Differential geht durch die Substitution

$$y = \sqrt[4]{h - c^2}\sqrt{1 - z^2}$$

über in

$$dx = \frac{c}{\sqrt{2}\sqrt[4]{h-c^2}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)\left(1-\frac{1}{2}z^2\right)}},$$

es handelt sich also wieder um den harmonischen Fall der elliptischen Funktionen

$$k^2 = \frac{1}{2},$$

und man erhält, wenn b eine Konstante bedeutet,

$$z = \operatorname{sn} \frac{x\sqrt{2}\sqrt[4]{h-c^2} - b}{c},$$

$$y = \sqrt[4]{h-c^2} \operatorname{cn} \frac{x\sqrt{2}\sqrt[4]{h-c^2} - b}{c}.$$

Ebenso wie in § 3 ergibt sich hieraus als Gleichung der einparametrigen durch den Nullpunkt gehenden Extremalenschar

$$(1) \qquad \begin{aligned} x &= \frac{c}{\sqrt{2}\sqrt[4]{h-c^2}} u = \xi(u,c), \\ y &= \frac{\sqrt[4]{h-c^2}}{\sqrt{2}} \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u} = \eta(u,c). \end{aligned}$$

Die Grenzkurven sind hier die Geraden

$$y = \pm\sqrt[4]{h}.$$

Aus

$$\xi_u = \frac{c}{\sqrt{2}}(h-c^2)^{-\frac{1}{4}}, \qquad \xi_c = \frac{1}{\sqrt{2}}(h-c^2)^{-\frac{5}{4}}\left(h-\frac{1}{2}c^2\right),$$

$$\eta_u = \frac{1}{\sqrt{2}}(h-c^2)^{\frac{1}{4}} \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u^2}, \quad \eta_c = -\frac{1}{2\sqrt{2}}(h-c^2)^{-\frac{3}{4}} \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u}$$

findet man die Determinante

$$(2) \quad \Delta = \xi_u \eta_c - \xi_c \eta_u = -\frac{1}{4(h-c^2)} \frac{c^2(\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u - u \operatorname{cn} u) + 2hu \operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u}.$$

Wegen

$$\Delta(K) \neq 0$$

kann hiernach die Gleichung zur Bestimmung des zum Nullpunkte konjugierten Punktes geschrieben werden

$$(3) \qquad c^2\left(\frac{\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u} - u\right) + 2hu = 0.$$

Bezeichnen wir die linke Seite der Gleichung mit $\varphi(u)$, so wird nach der entsprechenden in § 3 durchgeführten Rechnung

$$\varphi'(u) = \frac{c^2}{2}\frac{\mathrm{sn}\,u^4}{\mathrm{cn}\,u^2} + 2h > 0,$$

$\varphi(u)$ ist also eine beständig wachsende Funktion. Nun ist

$$\varphi(0)=0,\ \varphi(K-0)=+\infty,\ \varphi(K+0)=-\infty,\ \varphi(2K)=(2h-c^2)\,2K>0$$

nach der Annahme

$$h > c^2.$$

Der Wert $u = K$ ist der erste reelle Pol der Funktion $\varphi(u)$ in dem eben betrachteten Intervalle. Die erste positive Nullstelle v der Funktion $\varphi(u)$ liegt also zwischen K und $2K$; diese Nullstelle

$$u = v \tag{4}$$

existiert auf allen Extremalen, hat aber nach (3) einen von c abhängigen Wert.

Nach (3) ist im konjugierten Punkte

$$c = \sqrt{2h}\,\sqrt{\frac{u}{u - \mathrm{tn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}}; \tag{5}$$

durch Einsetzung dieses Wertes in (1) erhält man die Parameterdarstellung der Enveloppe der Schar (1), nämlich

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[4]{h}\,\frac{\sqrt{u}}{\sqrt[4]{(\mathrm{tn}\,u\,\mathrm{dn}\,u + u)(\mathrm{tn}\,u\,\mathrm{dn}\,u - u)}}\cdot u, \\ y &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt[4]{h}\,\sqrt[4]{\frac{\mathrm{tn}\,u\,\mathrm{dn}\,u + u}{\mathrm{tn}\,u\,\mathrm{dn}\,u - u}}\cdot\frac{\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{dn}\,u}. \end{aligned} \tag{6}$$

Reelle Werte von x und y ergeben sich also für diejenigen positiven Werte von u, für die gleichzeitig entweder

$$\mathrm{tn}\,u\,\mathrm{dn}\,u + u \geqq 0 \quad \text{und} \quad \mathrm{tn}\,u\,\mathrm{dn}\,u - u \geqq 0 \tag{7a}$$

oder

$$\mathrm{tn}\,u\,\mathrm{dn}\,u + u \leqq 0 \quad \text{und} \quad \mathrm{tn}\,u\,\mathrm{dn}\,u - u \leqq 0, \tag{7b}$$

ist. Die Bedingungen (7a) sind gleichzeitig für das Intervall

$$0 \leqq u \leqq K - 0$$

erfüllt, das aber nicht in Frage kommt, weil gezeigt wurde, dass u zwischen K und $2K$ liegt. Die Ungleichungen (b) gelten gleichzeitig für das Intervall

$$K + 0 \leqq u \leqq u^*, \tag{8}$$

wo u^* die zwischen K und $2K$ gelegene Nullstelle der Funktion

$$\psi(u) = \operatorname{tn} u \operatorname{dn} u + u$$

ist; ihr numerischer Wert ist (vgl. Fig. 2)

$$u^* = 2{,}29\ldots,$$

denn man findet aus den Tabellen

u	$\log u$	$\log(-\operatorname{tn} u \operatorname{dn} u)$
2,2797	0,357878	0,365577
2,2915	0,360120	0,357514

Für

$$u^* < u \leqq 2K$$

sind x und y nicht mehr reell, folglich ist der Variabilitätsbereich von u in den Gleichungen (6) genau das Intervall (8).

In (8) wächst $\psi(u)$ beständig von $-\infty$ bis 0, die Funktion

$$\chi(u) = \operatorname{tn} u \operatorname{dn} u - u$$

wächst beständig von $-\infty$ bis zu dem negativen Werte $-2u^*$, nach (6) wächst also x beständig von 0 bis ∞, während y beständig von $\sqrt[4]{h}$ bis 0 abnimmt.

Die Richtung der Extremalen ist nach (1) durch die Gleichungen

$$\frac{dx}{du} = \frac{c}{\sqrt{2}}(h - c^2)^{-\frac{1}{4}},$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{\sqrt{2}}(h - c^2)^{\frac{1}{4}} \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u^2},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{h - c^2}}{c} \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u^2}$$

gegeben; setzt man hierin für c den Wert (5), so erhält man die Richtung der Enveloppe

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{1}{\sqrt{2u}} \sqrt{-(\operatorname{tn} u \operatorname{dn} u + u)} \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u^2}$$

und erkennt aus

$$\left.\frac{\delta y}{\delta x}\right|^{u=K} = \left.\frac{\delta y}{\delta x}\right|^{u=u^*} = 0, \quad y\Big|^{u=u^*} = 0,$$

dass die Enveloppe für den Anfangswert von u die Grenzkurve, für den Endwert die Abszissenachse berührt, d. h. dass die x-Achse Asymptote der Enveloppe ist (Fig. 7, M. E. 2 cm,

$h = 16$; $c = 1, 2, 3$). Dies ist der Hauptunterschied gegen das letzte, durch trigonometrische Funktionen lösbare Problem, bei dem die Enveloppe ganz im Endlichen verlief mit dem Maximalwert $\sqrt{h}\,\pi$ für die Abszisse.

§ 8. $n = 6$, $h > 0$.

Aus § 5 (1) findet man

$$dx = \frac{c\,dy}{\sqrt{h - c^2 - y^6}}, \quad h > c^2$$

und erhält mit der Substitution

$$y = (h - c^2)^{\frac{1}{6}} \frac{1}{\sqrt[3]{2}} z^{-\frac{1}{2}}$$

$$dx = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \frac{c}{\sqrt[3]{h - c^2}} \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - 1}};$$

demnach ist, wenn b Integrationskonstante ist,

$$z = \wp\left(\frac{\sqrt[3]{2}\,\sqrt[3]{h - c^2}\,x - b}{c}\right),$$

und es handelt sich um den äquianharmonischen Fall der elliptischen Funktionen

$$g_2 = 0,\ g_3 = 1,\ g_2^3 - 27 g_3^2 = -27.$$

Wird die Integrationskonstante b gleich Null gesetzt, so erhalten wir die einparametrige durch den Nullpunkt gehende Extremalenschar

$$(1) \qquad y = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \frac{\sqrt[6]{h - c^2}}{\sqrt{\wp \dfrac{\sqrt[3]{2}\,\sqrt[3]{h - c^2}\,x}{c}}},$$

bei der die Diskussion der Gestalt dieselbe ist wie in § 4. Aus der Parameterdarstellung der Extremalengleichung

$$(1) \qquad \begin{aligned} x &= \frac{c}{\sqrt[3]{2}} (h - c^2)^{-\frac{1}{3}} u \qquad = \xi(u, c), \\ y &= \frac{1}{\sqrt[3]{2}} (h - c^2)^{\frac{1}{6}} \wp u^{-\frac{1}{2}} = \eta(u, c) \end{aligned}$$

entnehmen wir

$$\xi_u = \frac{c}{\sqrt[3]{2}}(h-c^2)^{-\frac{1}{3}}, \qquad \xi_c = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}u(h-c^2)^{-\frac{4}{3}}\left(h-\frac{1}{3}c^2\right),$$

$$\eta_u = -\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}(h-c^2)^{\frac{1}{6}}\wp' u\,\wp u^{-\frac{3}{2}}, \quad \eta_c = -\frac{1}{3\sqrt[3]{2}}c(h-c^2)^{-\frac{5}{6}}\wp u^{-\frac{1}{2}}$$

und finden

$$(2)\quad \Delta = \xi_u\eta_c - \xi_c\eta_u = \frac{-1}{6\sqrt[3]{4}}(h-c^2)^{-\frac{7}{6}}\,\frac{c^2(2\wp u + u\wp' u) - 3hu\wp' u}{\wp u^{\frac{3}{2}}}$$

Wie in § 4 behält $\wp u^{\frac{3}{2}}$ das ihm einmal gegebene Vorzeichen, und die auf $u=0$ folgenden reellen Pole des Nenners sind keine Nullstellen von Δ,

$$6\sqrt[3]{4}\,(h-c^2)^{\frac{7}{6}}\,\Delta(4m\omega) = (3h-c^2)\cdot -2\cdot 4m\omega,$$

$$6\sqrt[3]{4}\,(h-c^2)^{\frac{7}{6}}\,\Delta[(4m+2)\omega] = (3h-c^2)\cdot +2\cdot(4m+2)\omega.$$

Da die Stelle $u=\omega$ keine Nullstelle von Δ ist, kann die Gleichung für den konjugierten Punkt geschrieben werden

$$(3)\qquad c^2\left(2\frac{\wp u}{\wp' u}+u\right) - 3hu = 0.$$

Die Ableitung der linken Seite $\varphi(u)$ dieser Gleichung ist nach § 4, (4)

$$(4)\qquad \varphi'(u) = -3\left(h+\frac{c^2}{\wp' u^2}\right),$$

mithin negativ, $\varphi(u)$ nimmt also beständig ab. Nun ist $\varphi(0)=0$, $\varphi(\omega-0)=-\infty$, $\varphi(\omega+0)=+\infty$, $\varphi(2\omega)=-(3h-c^2)\cdot 2\omega$; da

$$h > c^2,\ 3h > c^2,$$

ist $\varphi(2\omega)$ negativ, und da die Stelle ω der erste reelle Pol der Funktion $\varphi(u)$ im betrachteten Intervalle ist, so existiert für alle Werte von c eine positive reelle Nullstelle v der Funktion $\varphi(u)$ im Intervalle

$$\omega < u < 2\omega.$$

Auf allen Extremalen gibt es auf der oberen Hälfte der ersten Welle (Fig. 8) einen zum Nullpunkte konjugierten Punkt; für

$$0 \leqq c \leqq \sqrt{h}$$

wächst seine Abszisse von 0 bis $+\infty$, seine Ordinate nimmt von $\sqrt[6]{h}$ bis 0 ab.

Nach (3) ist im konjugierten Punkte

$$c = \sqrt{3h}\sqrt{\frac{u}{2\frac{\wp u}{\wp' u}+u}}; \tag{5}$$

durch Einsetzung dieses Wertes in (1) erhält man als Parameterdarstellung der Enveloppe der Schar (1)

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{4}}\sqrt[6]{h}\left(\frac{u}{2\frac{\wp u}{\wp' u}+u}\right)^{\frac{1}{6}}\left(\frac{u}{\frac{\wp u}{\wp' u}-u}\right)^{\frac{1}{3}}u, \\ y &= \frac{1}{\sqrt[6]{2}}\sqrt[6]{h}\left(\frac{\frac{\wp u}{\wp' u}-u}{2\frac{\wp u}{\wp' u}+u}\right)^{\frac{1}{6}}\wp u^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{6}$$

Reelle Werte von x und y ergeben sich für Werte von u, die zwischen ω und 2ω liegen, nur in dem Intervalle

$$\omega \leqq u \leqq u^*, \tag{7}$$

wenn u^* die zwischen ω und 2ω gelegene Nullstelle der Funktion

$$\psi(u) = \frac{\wp u}{\wp' u} - u$$

bedeutet; in (7) sind dann gleichzeitig die beiden Ungleichungen

$$\frac{\wp u}{\wp' u} - u \geqq 0,\ 2\frac{\wp u}{\wp' u} + u \geqq 0 \tag{8}$$

erfüllt. Der numerische Wert der Nullstelle von $\psi(u)$ ist (vgl. Fig. 4)

$$u^* = 1{,}69\ldots,$$

denn die Jahnke-Emdeschen Tafeln liefern

u	$\log u$	$\log\frac{\wp u}{\wp' u}$
1,68294	0,226069	0,243979
1,69044	0,228257	0,221084

Die Richtung der Extremalen ist nach (1) durch die Gleichungen bestimmt

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{h-c^2}}{c}\frac{\wp' u}{\wp u\sqrt{\wp u}};$$

hieraus erhält man durch Einsetzung des Wertes (5) für c die Richtung der Enveloppe

$$\frac{\delta y}{\delta x} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{3u}} \sqrt{\frac{\wp u}{\wp' u} - u} \frac{\wp' u}{\wp u \sqrt{\wp u}}$$

und erkennt, dass die Enveloppe für $u = \omega$ die Grenzkurve $y = \sqrt[6]{h}$ berührt, und dass die x-Achse Asymptote der Enveloppe ist (Fig. 8, M.E. 2 cm, $h = 32$; $c = 2, 4, 5$).

II. Kapitel.

Konjugierte kinetische Brennpunkte.

§ 9. Allgemeines.

Ist das zum Extremum zu machende Integral das Aktionsintegral der Mechanik

$$J = \int \sqrt{2(U+h)}\, ds,$$

in dem U das Potential, h die Energiekonstante, ds das Bahnelement bedeuten, so heissen konjugierte Punkte „konjugierte kinetische Brennpunkte“[1]). Hierbei wird nicht zu einem festen Punkte, sondern zu jedem Punkte der Bahnkurve der konjugierte gesucht; wir legen daher jetzt nicht die Extremalenschar durch einen festen Punkt, sondern die Gleichung der Schar mit zwei willkürlichen Konstanten zugrunde und benützen das in der Einleitung S. 7 für diesen Fall angegebene Kriterium für das Auftreten konjugierter Punkte.

Die Fälle

$$U = \varepsilon r^n, \quad \varepsilon = \pm 1$$

und

$$U = \frac{1}{y^2}$$

sind von Kober[2]) erledigt. Wir wollen hier die Fälle

$$U = \varepsilon y^n, \quad y = 4, 6,$$

behandeln, von denen zwei mit Rücksicht auf die Enveloppen in § 7, § 8 untersucht wurden, ferner eins der Koberschen Beispiele

$$U = \frac{1}{r^4}$$

explizit mit den elliptischen Funktionen durchrechnen. Am Schlusse des Abschnitts wird eine weitere dynamische Aufgabe behandelt.

§ 10. $U = -y^4$, $h > 0$.

Aus § 7 kann man als Gleichung der Extremalenschar mit zwei willkürlichen Konstanten entnehmen

[1]) H. Kober, Dissertation. Ph. Frank, Monatshefte für Mathematik und Physik, 20. Jahrgang p. 172.

[2]) Kober, Dissertation und Journal für Mathematik, Bd. 140, p. 235 ff.

$$(1)\qquad \begin{aligned} x &= \frac{c}{\sqrt{2}}(h-c^2)^{-\frac{1}{4}}u + b = \xi(u,c,b), \\ y &= (h-c^2)^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{cn}\,u \qquad\quad = \eta(u,c,b), \end{aligned} \qquad k^2 = \frac{1}{2},$$

und findet

$$\xi_u = \frac{c}{\sqrt{2}}(h-c^2)^{-\frac{1}{4}}, \qquad \xi_c = \frac{1}{\sqrt{2}}u(h-c^2)^{-\frac{5}{4}}\left(h-\frac{1}{2}c^2\right), \quad \xi_b = 1,$$

$$\eta_u = -(h-c^2)^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u, \quad \eta_c = -\frac{1}{2}c\,(h-c^2)^{-\frac{3}{4}}\,\mathrm{cn}\,u, \qquad \eta_b = 0,$$

$$\vartheta_2(u) = -\eta_u,$$

$$\frac{\vartheta_1(u)}{\vartheta_2(u)} = \xi_c - \frac{\xi_u}{\eta_u}\eta_c = \frac{1}{\sqrt{2}}(h-c^2)^{-\frac{5}{4}}\left[u\left(h-\frac{1}{2}c^2\right) - \frac{1}{2}c^2\frac{\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}\right],$$

die Gleichung für den konjugierten Punkt ist also

$$(2)\quad hu - \frac{1}{2}c^2\left(u + \frac{\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}\right) = hv - \frac{1}{2}c^2\left(v + \frac{\mathrm{cn}\,v}{\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{dn}\,v}\right).$$

Die linke Seite $\varphi(u)$ hat die Ableitung

$$(3)\qquad \varphi'(u) = h + \frac{1}{2}c^2\frac{\mathrm{cn}\,u^4}{\mathrm{sn}\,u^2\,\mathrm{dn}\,u^2},$$

diese Grösse ist beständig positiv, $\varphi(u)$ also eine beständig wachsende Funktion. Für den Parameter u sind nach (1) alle reellen Werte möglich; willkürlich mit $u = 0$ beginnend, haben wir das Wertsystem

$$\varphi(+0) = -\infty, \qquad \varphi(K) = hK > 0, \qquad \varphi(2K-0) = +\infty,$$

$$(4)\quad \varphi(2K+0) = -\infty, \quad \varphi(3K) = 3\left(h-\frac{1}{2}c^2\right)K > 0, \quad \varphi(4K-0) = +\infty,$$

$$\varphi(4K-0) = -\infty, \quad \varphi(5K) = 5\left(h-\frac{1}{2}c^2\right)K > 0, \quad \varphi(6K-0) = +\infty$$

usf., und man erkennt, dass die Funktion $\varphi(u)$ jeden beliebigen vorgeschriebenen Wert $\varphi(v)$ beliebig oft annimmt. Läuft v von 0 bis $2K$, der Punkt P also durch die obere Hälfte der ersten Welle,

$$-\infty \leqq \varphi(v) \leqq +\infty, \quad 0 \leqq v \leqq 2K - 0,$$

so durchläuft der konjugierte Punkt Q deren untere Hälfte

$$-\infty \leqq \varphi(u) \leqq +\infty, \quad 2K + 0 \leqq u \leqq 4K - 0;$$

bewegt sich P auf der unteren Hälfte der ersten Welle, so wandert Q in demselben Sinne längs der oberen Hälfte der zweiten Welle usf. (Fig. 9). Zu jedem Punkte der Bahnkurve

ist mithin ein konjugierter vorhanden, die Bewegung unter der Kraft

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -4y^3$$

ist also oszillierend stabil.[1])

§ 11. $U = -y^6$, $h > 0$.

Die Gleichung der Extremalenschar ist nach § 8

$$(1)\qquad \begin{aligned} x &= \frac{c}{\sqrt[3]{2}}(h-c^2)^{-\frac{1}{3}}u + b = \xi(u,c,b),\\ y &= \frac{1}{\sqrt[3]{2}}(h-c^2)^{\frac{1}{6}}\wp u^{-\frac{1}{2}} = \eta(u,c,b),\\ g_2 &= 0,\ g_3 = 1,\ g_2^3 - 27g_3^2 = -27. \end{aligned}$$

Aus

$$\xi_b = 1,\quad \eta_b = 0$$

und den in § 8 für die übrigen partiellen Ableitungen angegebenen Werten folgt

$$\vartheta_2(u) = -\eta_u,$$

$$\frac{\vartheta_1(u)}{\vartheta_2(u)} = \xi_c - \frac{\xi_u}{\eta_u}\eta_c = \frac{1}{3\sqrt[3]{2}}(h-c^2)^{-\frac{4}{3}}\left[3hu - c^2\left(u + \frac{2\wp u}{\wp' u}\right)\right],$$

also als Gleichung für den konjugierten Punkt

$$(2)\qquad c^2\left(2\frac{\wp u}{\wp' u} + u\right) - 3hu = c^2\left(2\frac{\wp v}{\wp' v} + v\right) - 3hv.$$

Nach § 8 ist die linke Seite $\varphi(u)$ eine beständig abnehmende Funktion von u. Für u sind nach (1) alle reellen Werte möglich. Wir beginnen willkürlich mit dem Werte

$$u = \omega + 0$$

und haben dann

$$\varphi(\omega+0) = +\infty,\ \varphi(2\omega) = -(3h-c^2)2\omega < 0,\ \varphi(3\omega-0) = -\infty,$$
$$\varphi(3\omega+0) = +\infty,\ \varphi(4\omega) = -(3h-c^2)4\omega < 0,\ \varphi(5\omega-0) = -\infty,$$
$$\varphi(5\omega+0) = +\infty,\ \varphi(6\omega) = -(3h-c^2)6\omega < 0,\ \varphi(7\omega-0) = -\infty$$

usf. Bewegt sich also ein Punkt $P(v)$ (Fig. 10, M. E. 2 cm, $h = 32$, $c = 2$, $b = 0$) im Sinne wachsender Abszissen vom ersten Maximum der die Extremale darstellenden Welle zu

[1]) Kober, Dissertation p. 6, 7.

ihrem ersten Minimum, so wandert der konjugierte Punkt $Q(u)$ von diesem Minimum zum zweiten Maximum: denn unter diesen Umständen hat man

$$+\infty > \varphi(v) > -\infty, \quad +\infty > \varphi(u) > -\infty.$$

Allgemein durchläuft, wenn P von einem höchsten oder tiefsten Punkte der Bahnkurve an eine Halbwelle durchwandert, der konjugierte Punkt die folgende Halbwelle. Zu jedem Punkte der Bahn gehört ein konjugierter, daher ist die Bewegung auch in diesem Falle oszillierend stabil.

§ 12. $U = y^4$, $h = -l$, $l > 0$.

§ 5, (1) liefert als Differentialgleichung der Extremalen

$$dx = \frac{c\,dy}{\sqrt{y^4 - l - c^2}} = \frac{c\,dy}{\sqrt{(y^2 + \sqrt{l + c^2})(y^2 - \sqrt{l + c^2})}},$$

und durch den Ansatz

$$y = \frac{\sqrt[4]{l + c^2}}{\sqrt{1 - z^2}}$$

ergibt sich

$$dx = \frac{c}{\sqrt{2}\sqrt[4]{l + c^2}} \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)\left(1 - \frac{1}{2}z^2\right)}};$$

also ist

$$z = \operatorname{sn} \frac{\sqrt[4]{l + c^2}\sqrt{2}}{c}(x - b),$$

$$y = \frac{\sqrt[4]{l + c^2}}{\operatorname{cn} \frac{\sqrt[4]{l + c^2}\sqrt{2}}{c}(x - b)}, \quad k^2 = \frac{1}{2}.$$

Die Gleichung der Schar mit zwei willkürlichen Konstanten in Parameterform ist

$$(1) \qquad \begin{aligned} x &= \frac{c(l + c^2)^{-\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}} u + b = \xi(u, c, b), \\ y &= \frac{(l + c^2)^{\frac{1}{4}}}{\operatorname{cn} u} = \eta(u, c, b), \end{aligned} \qquad k^2 = \frac{1}{2}.$$

An den Stellen

$$u = (2n + 1)K,$$

wo n eine ganze Zahl bedeutet, wächst y über alle Grenzen;

für die dynamische Aufgabe kommt nur ein in sich zusammenhängender Teil der Kurve, also nur ein Intervall von der Form

$$(2n+1)\,K+0 \leqq u \leqq (2n+3)\,K-0$$

in Frage, wo n eine ganze Zahl bedeutet. Wir wählen etwa

$$n=-1,$$

betrachten also das Intervall

(1a) $$-K+0 \leqq u \leqq +K-0.$$

Fig. 11 gibt ein Bild der Kurve (M.E. 2 cm, $l=7$, $c=3$, $b=0$).

Man hat

$$\xi_u = \frac{c\,(l+c^2)^{-\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}}, \qquad \xi_c = \frac{u}{\sqrt{2}}(l+c^2)^{-\frac{5}{4}}\left(l+\frac{1}{2}c^2\right), \quad \xi_b = 1,$$

$$\eta_u = (l+c^2)^{\frac{1}{4}}\frac{\operatorname{sn}u\operatorname{dn}u}{\operatorname{cn}u^2}, \quad \eta_c = \frac{1}{2}c\,(l+c^2)^{-\frac{3}{4}}\frac{1}{\operatorname{cn}u}, \qquad \eta_b = 0,$$

$$\vartheta_2(u) = -\eta_u,$$

$$\frac{\vartheta_1(u)}{\vartheta_2(u)} = \xi_c - \frac{\xi_u}{\eta_u}\eta_c = \frac{1}{\sqrt{2}}(l+c^2)^{-\frac{5}{4}}\left[lu+\frac{1}{2}c^2\left(u-\frac{\operatorname{cn}u}{\operatorname{sn}u\operatorname{dn}u}\right)\right]:$$

also heisst die Gleichung zur Bestimmung des zum Punkte $P(v)$ konjugierten Punktes $Q(u)$

(2) $$lu+\frac{1}{2}c^2\left(u-\frac{\operatorname{cn}u}{\operatorname{sn}u\operatorname{dn}u}\right) = lv+\frac{1}{2}c^2\left(v-\frac{\operatorname{cn}v}{\operatorname{sn}v\operatorname{dn}v}\right).$$

Die Ableitung der linken Seite $\varphi(u)$ ist

(3) $$\varphi'(u) = l+\frac{1}{2}c^2\frac{1}{\operatorname{sn}u^2\operatorname{dn}u^2},$$

$\varphi'(u)$ ist also stets positiv, $\varphi(u)$ eine beständig wachsende Funktion. Sie wächst in der ersten Hälfte des Intervalles (1a) beständig von $-\left(l+\frac{1}{2}c^2\right)K$ bis $+\infty$, in der zweiten beständig von $-\infty$ bis zu dem positiven Werte $\left(l+\frac{1}{2}c^2\right)K$, sie nimmt daher im Intervalle (1a) jeden zwischen $-K\left(l+\frac{1}{2}c^2\right)$ und $+K\left(l+\frac{1}{2}c^2\right)$ gelegenen Wert $\varphi(v)$ genau zweimal an, jeden andern Wert $\varphi(v)$ nur einmal.

Im Intervalle (1a) existiert daher genau ein kinetischer Brennpunkt Q zu allen Punkten P von der Art, dass

$$(4)\quad -K\left(l+\frac{1}{2}c^2\right)\leqq lv+\frac{1}{2}c^2\left(v-\frac{\operatorname{cn}v}{\operatorname{sn}v\operatorname{dn}v}\right)\leqq\left(l+\frac{1}{2}c^2\right)K$$

ist. Diese Punkte P sind dadurch gegeben, dass sie einerseits zwischen $-K$ und dem zwischen $-K$ und 0 gelegenen Werte w_1 liegen, für den

$$(5)\quad +K\left(l+\frac{1}{2}c^2\right)=lw_1+\frac{1}{2}c^2\left(w_1-\frac{\operatorname{cn}w_1}{\operatorname{sn}w_1\operatorname{dn}w_1}\right)$$

ist, andererseits zwischen $+K$ und dem zwischen $+K$ und 0 gelegenen Werte w_2, für den

$$(6)\quad -K\left(l+\frac{1}{2}c^2\right)=lw_2+\frac{1}{2}c^2\left(w_2-\frac{\operatorname{cn}w_2}{\operatorname{sn}w_2\operatorname{dn}w_2}\right)$$

ist. Die Existenz der Werte w_1 und w_2 in den für sie angegebenen Intervallen folgt aus der Bemerkung über die Werte der Funktion φ im Intervalle (1a). Es ist aber

$$w_1=-w_2,$$

setzen wir also

$$(7)\qquad w_2=w,$$

so ist zu sagen: Zu jedem Punkte $P(v)$ der Intervalle

$$(8)\qquad -K\leqq v\leqq -w,\quad w\leqq v\leqq K$$

existiert ein konjugierter $Q(u)$.

Den Werten

$$u=\pm K$$

entsprechen die beiden unendlich fernen Punkte des Kurvenzweiges, den Werten

$$u=\pm w$$

zwei bestimmte zur Geraden

$$x-b=0$$

symmetrische Punkte R und R'.

Bewegt sich $P(v)$ von dem einen unendlich fernen Punkte $(v=-K)$ bis $R'(u=-w)$, so wandert der konjugierte Punkt $Q(u)$ von $R(u=+w)$ nach dem andern unendlich fernen Punkte $(u=+K)$. (Fig. 11, $w=0{,}12\ldots$).

Den Punkten, die der Bedingung (4) nicht genügen, entspricht kein konjugierter Punkt.

Die Bewegung unter dem Einflusse der Kraft

$$\frac{\partial U}{\partial y}=4y^3,\ l>0$$

ist beschränkt stabil, denn in der Richtung des positiven Drehsinns ist zu dem Punkte $P(v)$ ein konjugierter nur vorhanden, solange er sich von ∞ nach R' bewegt.

In dem Spezialfalle

$$l=0,\quad dx=\frac{c\,dy}{\sqrt{y^4-c^2}} \tag{9}$$

sind die Extremalen die Kurven

$$\begin{aligned} x&=\sqrt{\frac{c}{2}}\,u+b=\xi(u,c,b),\\ y&=\frac{\sqrt{c}}{\operatorname{cn} u}\qquad\quad=\eta(u,c,b), \end{aligned}\qquad k^2=\frac{1}{2}, \tag{10}$$

und die Gleichung für den konjugierten Punkt lautet

$$u-\frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u\operatorname{dn} u}=v-\frac{\operatorname{cn} v}{\operatorname{sn} v\operatorname{dn} v}; \tag{11}$$

alles dies hätte man auch direkt aus dem Variationsproblem

$$\delta\int y^2\sqrt{1+p^2}\,dx=0$$

entwickeln können.

Lässt man nun bei dieser Aufgabe die Grössen x, y, c, b in folgende übergehen: $i\sqrt{i}\,x$, $\sqrt{i}\,y$, ic, $i\sqrt{i}\,b$, so erhält man das Variationsproblem

$$\delta\int y^2\sqrt{1-p^2}\,dx=0,$$

die Quadratur

$$dx=\frac{c\,dy}{\sqrt{c^2-y^4}},$$

u geht in iu über, und wegen

$$\operatorname{cn} iu=\frac{1}{\operatorname{cn}(u,k')},\quad \operatorname{sn} iu=i\operatorname{tn}(u,k'),\quad \operatorname{dn} iu=\frac{\operatorname{dn}(u,k')}{\operatorname{cn}(u,k')}$$

wird die Gleichung der Extremalen

$$y=\sqrt{c}\operatorname{cn}\frac{\sqrt{2}\,(x-b)}{\sqrt{c}}; \tag{12}$$

der Modul dieser elliptischen Funktion, der komplementäre zu dem der eben behandelten Aufgabe, ist wieder $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Die Gleichung (11) für den konjugierten Punkt transformiert sich in

$$u+\frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u\operatorname{dn} u}=v+\frac{\operatorname{cn} v}{\operatorname{sn} v\operatorname{dn} v}. \tag{13}$$

Damit die Extremalen (12) alle durch einen festen Punkt, etwa durch den Nullpunkt gehen, muss bis auf Perioden

$$\frac{\sqrt{2}\,b}{\sqrt{c}} = K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin\varphi^2}}$$

sein, das Argument v also gleich K gewählt werden; dann wird die Schargleichung

$$(14) \qquad y = \sqrt{c}\,\mathrm{cn}\left(\frac{\sqrt{2}\,x}{\sqrt{c}} - K\right), \quad k = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

und wegen

$$\mathrm{sn}(w+K) = \frac{\mathrm{cn}\,w}{\mathrm{dn}\,w}, \ \mathrm{cn}(w+K) = -k'\frac{\mathrm{sn}\,w}{\mathrm{dn}\,w}, \ \mathrm{dn}(w+K) = \frac{k'}{\mathrm{dn}\,w}$$

bekommen wir statt der Gleichung (13)

$$(15) \qquad w - \frac{\mathrm{sn}\,w\,\mathrm{dn}\,w}{\mathrm{cn}\,w} = 0.$$

So erhalten wir durch die imaginäre Beziehung zwischen den beiden Variationsproblemen in (14), (15) die Gleichungen § 3, (1), (3), wie wir erwarteten.

Es bedarf kaum der Erwähnung, dass man ebenso durch eine imaginäre Substitution von den Gleichungen beim Problem der kleinsten Rotationsfläche[1]) zu denen des § 2 übergeht.

§ 13. $U = y^4$, $h > 0$.

Nimmt man in der hier sich nach § 9 (1) ergebenden Differentialgleichung der Extremalen

$$dx = \frac{c\,dy}{\sqrt{y^4 + h - c^2}}$$

$$h < c^2$$

an, so kommt man zu ganz ähnlichen Ergebnissen wie in der vorigen Aufgabe.

Ist dagegen

$$h > c^2,$$

so hat dx die Form

$$(1) \qquad dx = \frac{c}{\sqrt{h - c^2}} \frac{dy}{\sqrt{1 + \left(\frac{y}{\sqrt[4]{h - c^2}}\right)^4}},$$

[1]) Kneser, L. d. V. § 9, § 23.

und der Radikand hat nicht mehr, wie in allen früheren Beispielen, reelle Nullstellen; dieser Fall soll jetzt behandelt werden. In

$$(2) \qquad dx = \frac{c}{\sqrt[4]{h-c^2}} \frac{dz}{\sqrt{1+z^4}}, \quad \frac{y}{\sqrt[4]{h-c^2}} = z$$

setze man, um zur Jacobischen Normalform zu gelangen[1]),

$$(3) \qquad z = \sqrt{\frac{1+\sqrt{1-a^2}}{1-\sqrt{1-a^2}}},$$

so wird (2)

$$dx = \frac{c}{2\sqrt[4]{h-c^2}} \frac{da}{\sqrt{(1-a^2)\left(1-\frac{1}{2}a^2\right)}}:$$

folglich ist, wenn b Integrationskonstante ist, für

$$\frac{\sqrt[4]{h-c^2}}{c}(x-b) = u$$

$$a = \operatorname{sn} 2u,$$

$$(4) \qquad z = \sqrt{\frac{1+\operatorname{cn} 2u}{1-\operatorname{cn} 2u}}.$$

Die Benutzung der Formeln für doppeltes Argument[2]) liefert z als eindeutige Funktion von u,

$$z = \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u}.$$

Nach (2), (4) ergibt sich schliesslich als die Gleichung der Schar mit zwei willkürlichen Konstanten

$$(5) \qquad \begin{aligned} x &= \frac{c}{\sqrt[4]{h-c^2}} u + b \quad = \xi(u,c,b), \\ y &= \sqrt[4]{h-c^2} \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u} = \eta(u,c,b), \end{aligned} \qquad k^2 = \frac{1}{2}.$$

Für

$$u = \pm 2n K, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

wächst y über alle Grenzen; wieder ist nur ein in sich zusammenhängender Teil der Kurve brauchbar, daher Beschränkung auf ein Intervall

---

[1]) Greenhill, E. F., p. 60.

[2]) z. B. bei Weber, Algebra III, Braunschweig 1908, p. 201.

$$2n\,K + 0 \leqq 2(n+1)\,K - 0$$

geboten, etwa (für $n = 0$) auf das Intervall

(5a) $$+0 \leqq u \leqq 2K - 0.$$

In Fig. 12 ist eine Kurve (5) gezeichnet (M. E. 1 cm, $h = 2$, $c = 1$, $b = 0$).

Aus (5) findet man

$$\xi_u = c\,(h - c^2)^{-\frac{1}{4}}, \qquad \xi_c = (h-c^2)^{-\frac{5}{4}}\left(h - \frac{1}{2}c^2\right)u, \quad \xi_b = 1,$$

$$\eta_u = (h-c^2)^{\frac{1}{4}}\,\frac{\frac{1}{2}\operatorname{sn}u^2\operatorname{cn}u^2 - \operatorname{dn}u^2}{\operatorname{sn}u^2\operatorname{dn}u^2}, \quad \eta_c = -\frac{1}{2}c\,(h-c^2)^{-\frac{3}{4}}\,\frac{\operatorname{cn}u}{\operatorname{sn}u\operatorname{dn}u}, \quad \eta_b = 0,$$

$$\vartheta_2(u) = -\eta_u,$$

$$\frac{\vartheta_1(u)}{\vartheta_2(u)} = \xi_c - \frac{\xi_u}{\eta_u}\eta_c = (h-c^2)^{-\frac{5}{4}}\left[\left(h - \frac{1}{2}c^2\right)u - \frac{1}{2}c^2\,\frac{\operatorname{sn}u\operatorname{cn}u\operatorname{dn}u}{\operatorname{cn}u^2 + \frac{1}{2}\operatorname{sn}u^4}\right],$$

also ist die Gleichung für den zu $P(v)$ konjugierten Punkt $Q(u)$

(6) $$hu - \frac{1}{2}c^2\left(u + \frac{\operatorname{sn}u\operatorname{cn}u\operatorname{dn}u}{\operatorname{cn}u^2 + \frac{1}{2}\operatorname{sn}u^4}\right) = hv - \frac{1}{2}c^2\left(v + \frac{\operatorname{sn}v\operatorname{cn}v\operatorname{dn}v}{\operatorname{cn}u^2 + \frac{1}{2}\operatorname{sn}u^4}\right).$$

Für die Ableitung $\varphi'(u)$ der linken Seite $\varphi(u)$ von (6) findet man

(7) $$\varphi'(u) = h - \frac{1}{2}c^2\left(\frac{\operatorname{cn}u^2}{\operatorname{cn}u^2 + \frac{1}{2}\operatorname{sn}u^4}\right)^2.$$

Da der Faktor von $-\frac{1}{2}c^2$ höchstens gleich 1 werden kann, so ist bei unserer Annahme

$$h - c^2 > 0$$

$\varphi'(u)$ stets positiv, $\varphi(u)$ also eine beständig wachsende Funktion. Für endliche Werte von u kann nun $\varphi(u)$ im Reellen nie unendlich werden, denn der Nenner $\operatorname{cn}u^2 + \frac{1}{2}\operatorname{sn}u^4$ kann im Reellen nie verschwinden. $\varphi(u)$ wächst also im Intervall (5a) beständig von 0 bis zu der positiven Grösse $\left(h - \frac{1}{2}c^2\right)2K$ und nimmt demnach jeden im Intervalle

$$0 \leqq \varphi(v) \leqq \left(h - \frac{1}{2}c^2\right)2K$$

gelegenen Wert $\varphi(v)$ genau einmal an.

Daher existiert zu keinem Punkte der Kurve (5), (5a) ein konjugierter, die Bewegung unter der Wirkung der Kraft

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 4y^3, \quad h > 0$$

ist also bei unserer Annahme oszillierend nicht stabil.

§ 14. $U = \frac{1}{r^4}$, $h = -l, l > 0$. [1])

Der Ansatz

$$\delta \int \sqrt{U + h}\, ds = \delta \int \sqrt{\frac{1}{r^4} - l}\, \sqrt{1 + r^2 p^2}\, dr = 0, \quad p = \frac{d\varphi}{dr},$$

in dem r und φ Polarkoordinaten bedeuten, liefert zufolge der Eulerschen Differentialgleichung E_2 (§ 1)

$$f_\varphi - \frac{df_p}{dr} = 0,$$

die hier

$$f_p = \text{const} = c$$

lautet, als Differentialgleichung der Extremalen

$$(1) \quad d\varphi = \frac{c\,dr}{\sqrt{1 - c^2 r^2 - l r^4}} = \frac{c\,dr}{\sqrt{l}\sqrt{\left(\frac{\sqrt{c^4 + 4l} + c^2}{2l} + r^2\right)\left(\frac{\sqrt{c^4 + 4l} - c^2}{2l} - r^2\right)}}.$$

Setzt man hierin

$$(2) \quad \frac{\sqrt{c^4 + 4l} - c^2}{2l} - r^2 = \frac{1}{\sqrt{l}} \frac{k}{k'} z^2$$

und führt die echten Brüche

$$(3) \quad \frac{\sqrt{c^4 + 4l} - c^2}{2\sqrt{c^4 + 4l}} = k^2, \quad \frac{\sqrt{c^4 + 4l} + c^2}{2\sqrt{c^4 + 4l}} = k'^2, \quad k^2 + k'^2 = 1$$

als neue Konstanten ein, woraus

$$c^2 = \sqrt{l}\, \frac{k'^2 - k^2}{k k'}$$

folgt, so geht (1) in die Jacobische Normalform über

$$(4) \quad d\varphi = \sqrt{k'^2 - k^2}\, \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}},$$

[1]) Kober, Dissertation, § 15.

und die Umkehrung liefert

$$z = \operatorname{sn} \frac{\varphi - b}{\sqrt{k'^2 - k^2}},$$

schliesslich nach (2)

$$r = \frac{1}{\sqrt[4]{l}} \sqrt{\frac{k}{k'}} \operatorname{cn} \frac{\varphi - b}{\sqrt{k'^2 - k^2}}.$$

Hieraus folgt als die Schargleichung

$$(5) \qquad \begin{aligned} r &= \frac{1}{\sqrt[4]{l}} \sqrt{\frac{k}{k'}} \operatorname{cn} u \quad = \varrho\,(u, k, b), \\ \varphi &= \sqrt{k'^2 - k^2}\, u + b = \varphi\,(u, k, b).^{1}) \end{aligned}$$

Bei dieser Schar tritt im Gegensatz zu allen bisher behandelten Beispielen der Fall ein, dass der Modul nicht konstant, sondern, wie (3) zeigt, variabler Scharparameter ist. Hier sind also die Formeln für die Differentiation der elliptischen Funktionen nach dem Modul anzuwenden, speziell die Formel II der Einleitung. Man findet für die partiellen Abteilungen der Funktionen (5)

$$\varrho_u = -\frac{1}{\sqrt[4]{l}} \sqrt{\frac{k}{k'}} \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u, \qquad \varrho_b = 0,$$

$$\varrho_k = \frac{1}{\sqrt[4]{l}} \left(\frac{1}{2\, k'^2 \sqrt{k k'}} \operatorname{cn} u + \frac{1}{k'^2 \sqrt{k k'}} E(u) \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\sqrt{k k'}} u \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u - \frac{k \sqrt{k}}{k'^2 \sqrt{k'}} \operatorname{sn} u^2 \operatorname{cn} u \right),$$

$$\varphi_u = \sqrt{k'^2 - k^2}, \qquad \varphi_k = -\frac{2\, k}{\sqrt{k'^2 - k^2}} u, \qquad \varphi_b = 1;$$

daher hat man

$$\vartheta_2(u) = -\varrho_u,$$

$$\frac{\vartheta_1(u)}{\vartheta_2(u)} = \varphi_k - \frac{\varphi_u}{\varrho_u} \varrho_k = \frac{1}{2 \sqrt{k'^2 - k^2}\, k k'^2} \left[2\,(k'^2 - k^2) E(u) \right.$$

$$\left. - 2\, k'^2 u + (k'^2 - k^2) \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u} - 2\,(k'^2 - k^2) k^2 \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u} \right].$$

Die Gleichung des zu $P(v)$ konjugierten Punktes $Q(u)$ heisst also

---

[1]) Kober, Dissertation, p. 46.

$$(6)\quad 2(k'^2-k^2)E(u)-2k'^2u+(k'^2-k^2)\frac{\operatorname{cn}u}{\operatorname{sn}u\operatorname{dn}u}-2(k'^2-k^2)k^2\frac{\operatorname{sn}u\operatorname{cn}u}{\operatorname{dn}u}$$
$$=2(k'^2-k^2)E(v)-2k'^2v+(k'^2-k^2)\frac{\operatorname{cn}v}{\operatorname{sn}v\operatorname{dn}v}-2(k'^2-k^2)k^2\frac{\operatorname{sn}v\operatorname{cn}v}{\operatorname{dn}v}.$$

Für die Ableitung der linken Seite $\varphi(u)$ erhält man, wenn man

$$\frac{dE(u)}{du}=\operatorname{dn}u^2$$

berücksichtigt,

$$(7)\quad \varphi'(u)=-\frac{(1-2k^2)-k^2\operatorname{sn}u^2(\operatorname{sn}u^2-2k^2)}{2kk'^2\sqrt{k'^2-k^2\operatorname{sn}u^2\operatorname{dn}u^2}}.$$

Es ist aber [vgl. (3)]

$$1-2k^2>0,\quad 1-2k^2\geqq\operatorname{sn}u^2-2k^2,$$

umsomehr

$$1-2k^2>k^2\operatorname{sn}u^2(\operatorname{sn}u^2-2k^2),$$

$\varphi'(u)$ also beständig negativ und von Null verschieden, $\varphi(u)$ eine beständig abnehmende Funktion.

Für den Parameter u ist nur ein Wertgebiet zulässig, in dem

$$r=\frac{1}{\sqrt[4]{l}}\sqrt{\frac{k}{k'}}\operatorname{cn}u$$

von Null verschieden ist, denn der Punkt $r=0$ ist ein singulärer Punkt im Sinne des Prinzips der kleinsten Aktion.[1]) Daher beschränken wir uns etwa auf das Intervall

$$(5a)\qquad -K+0\leqq u\leqq+K-0.$$

In diesem Intervalle nimmt $\varphi(u)$ die Werte

$$\varphi(-K)=-2\left(u-E(u)\right)-2k^2\left(2E(u)-u\right)\Big|^{u=-K},$$
$$\varphi(-0)=-\infty,\quad \varphi(+0)=+\infty,$$
$$\varphi(+K)=-2\left(u-E(u)\right)-2k^2\left(2E(u)-u\right)\Big|^{u=+K}$$

an, wobei die Stelle $u=0$ die einzige Unendlichkeitsstelle der Funktion $\varphi(u)$ im Gebiete (5a) ist. Um das Vorzeichen der Grössen $\varphi(-K)$, $\varphi(+K)$ zu bestimmen, bilden wir den Differentialquotienten

$$(8)\quad \frac{d}{du}\left[-2\left(u-E(u)\right)-2k^2\left(2E(u)-u\right)\right]=-2k^2(\operatorname{dn}u^2+k'^2\operatorname{sn}u^2):$$

[1]) Kober, Dissertation, p. 26 f.

er ist stets negativ und von Null verschieden. Hiernach muss, da die Funktion

$$\psi(u) = -2\left(u - E(u)\right) - 2k^2\left(2E(u) - u\right)$$

für $u = 0$ durch Null hindurchgeht,

$$\psi(-K) > 0, \quad \psi(+K) < 0,$$
$$\varphi(-K) > 0, \quad \varphi(+K) < 0$$

sein. Das Wertsystem

$$\varphi(-K) = 2k'^2 K - 2(k'^2 - k^2)E > 0,$$
$$(9) \qquad \varphi(-0) = -\infty, \quad \varphi(+0) = +\infty,$$
$$\varphi(+K) = -2k'^2 K + 2(k'^2 - k^2)E < 0$$

lässt erkennen, dass die Funktion $\varphi(u)$ im Intervalle (5a) die zwischen $\varphi(-K)$ und $\varphi(+K)$ gelegenen Werte genau zweimal annimmt, alle übrigen nur einmal. Die zu den ersteren gehörigen Parameterwerte v liegen einerseits zwischen $-K$ und dem zwischen $-K$ und 0 gelegenen, nach (9) existierenden Werte w_1, für den

$$(10) \quad \varphi(w_1) = 2(k'^2 - k^2)E(w_1) - 2k'^2 w_1 + (k'^2 - k^2)\frac{\operatorname{cn} w_1}{\operatorname{sn} w_1 \operatorname{dn} w_1}$$
$$- 2(k'^2 - k^2)\frac{\operatorname{sn} w_1 \operatorname{cn} w_1}{\operatorname{dn} w_1} = \varphi(+K)$$

ist, andererseits zwischen $+K$ und dem zwischen $+K$ und 0 gelegenen Werte w_2, für den

$$(11) \qquad \varphi(w_2) = \varphi(-K)$$

gilt. $\varphi(u)$ ist eine ungerade Funktion, folglich

$$(12) \qquad w_1 = -w_2.$$

Wird

$$(13) \qquad w_2 = w$$

gesetzt, so können wir sagen: Zu jedem Punkte $P(v)$ der Intervalle

$$(14) \qquad -K \leqq v \leqq -w, \quad w \leqq v \leqq +K$$

existiert ein konjugierter $Q(u)$.

Den Werten

$$u = \pm K$$

entspricht der Pol O, den Werten

$$u = \pm w$$

entsprechen zwei bestimmte zu der Geraden

$$\varphi = b$$

symmetrische Punkte R, R'.[1])

[1]) Kober, Dissertation, Fig. 13.

Bewegt sich der Punkt $P(v)$ von $O(-K)$ im positiven Drehsinne nach R' $(-w)$, so wandert der konjugierte $Q(u)$ in demselben Sinne von $R(+w)$ nach $O(+K)$.

Den Punkten $P(v)$, die der Bedingung (14) nicht genügen, also den zwischen R' und R gelegenen Punkten, entspricht kein konjugierter Punkt.

Zum Punkte $P(v)$ ist in der Richtung des positiven Drehsinns ein konjugierter $Q(u)$ nur solange vorhanden, als er sich von O nach R' bewegt.

Die Bewegung unter dem Einflusse der anziehenden Zentralkraft

$$\frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{4}{r^5}$$

ist also bei negativer Energiekonstante beschränkt stabil.

Das sind die Koberschen Ergebnisse.

§ 15.

Ein masseloser Stab dreht sich in der Ebene um einen festen Punkt O; er trägt eine feste Masse m_0 in der Entfernung a von O und eine auf ihm bewegliche Masse m. Es soll die Bewegung des Systems nach dem Prinzip der kleinsten Aktion untersucht werden.[1])

Die Bahnkurve liefert das Prinzip der kleinsten Aktion allgemein durch den Ansatz

$$\delta \int \sqrt{(U+h) \sum_{a}^{1,n} m_a \, ds_a^2} = 0,$$

wo U das Potential der äusseren Kräfte, h die Energiekonstante bedeutet und über alle n Massenpunkte des Systems summiert wird. Im vorliegenden Falle ist

$$n = 2,$$

und man hat (Fig. 13, 14)

$$m_1 ds_1^2 = m_0 a^2 d\varphi^2,$$
$$m_2 ds_2^2 = m (dr^2 + r^2 d\varphi^2);$$

da äussere Kräfte nicht vorhanden sind, also

$$U = \text{const}$$

[1]) Bei dieser Aufgabe habe ich die Rechnungen der Mitglieder des Seminars über Variationsrechnung, das Herr Geheimrat Kneser im W. S. 1910/11 abhielt, benutzt.

zu setzen ist, bekommt man

$$\delta\int\sqrt{m\,dr^2+(m_0a^2+mr^2)\,d\varphi^2}=0,$$

$$(1)\qquad \delta\int\sqrt{1+(\mu^2+r^2)\,p^2}\;dr=0,\quad \mu^2=\frac{m_0a^2}{m},\quad p=\frac{d\varphi}{dr}.$$

Die Eulersche Differentialgleichung (E_2)

$$f_p=\text{const}$$

liefert als Differentialgleichung der Bahnkurve

$$(2)\qquad d\varphi=\frac{c\,dr}{\sqrt{(\mu^2+r^2)\,(\mu^2-c^2+r^2)}}.$$

Hier sind die beiden Fälle

$$\text{(a)}\ \mu^2>c^2,\quad (b)\ \mu^2<c^2$$

zu unterscheiden.

(a) In diesem Falle substituieren wir in

$$(2a)\qquad d\varphi=\frac{c}{\sqrt{\mu^2-c^2}}\,\frac{d\,\frac{r}{\mu}}{\sqrt{\left[1+\left(\frac{r}{\mu}\right)^2\right]\left[1+\frac{\mu^2}{\mu^2-c^2}\left(\frac{r}{\mu}\right)^2\right]}}$$

$$(3)\qquad \frac{r}{\mu}=\frac{\sqrt{\mu^2-c^2}}{\mu}\,\frac{z}{\sqrt{1-z^2}}$$

und setzen den positiven echten Bruch

$$(4)\qquad \frac{c}{\mu}=k;$$

dann folgt

$$d\varphi=\frac{k\,dz}{\sqrt{(1-z^2)\,(1-k^2z^2)}},$$

$$z=\operatorname{sn}\left(\frac{\varphi-b}{k},k\right),$$

wenn b Integrationskonstante ist, also nach (3)

$$(5)\qquad r=\mu k'\operatorname{tn}\left(\frac{\varphi-b}{k},k\right).$$

Die Gleichung der Extremalenschar mit zwei willkürlichen Konstanten, von denen die eine der nach (4) von Extremale zu Extremale verschiedene Modul k der elliptischen Funktionen ist, heisst demnach

$$(6)\qquad \begin{aligned} r&=\mu k'\operatorname{tn}(u,k)=\varrho(u,k,b),\\ \varphi&=ku+b\quad\ =\varphi(u,k,b),\end{aligned}$$

Im Falle

(**b**) schreiben wir die Gleichung (2)

$$(2b) \qquad d\varphi = \frac{c}{\mu} \frac{d\frac{r}{\mu}}{\sqrt{\left[1+\left(\frac{r}{\mu}\right)^2\right]\left[\left(\frac{r}{\mu}\right)^2-\left(\frac{c^2}{\mu^2}-1\right)\right]}}$$

und substituieren

$$(7) \qquad \frac{r}{\mu} = \frac{\sqrt{c^2-\mu^2}}{\mu} \frac{1}{\sqrt{1-z^2}},$$

$$(8) \qquad \frac{\mu}{c} = k,$$

dann wird (2b)

$$d\varphi = \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

$$z = \operatorname{sn}(\varphi - b, k),$$

folglich

$$(9) \qquad r = \mu \frac{k'}{k} \frac{1}{\operatorname{cn}(\varphi - b, k)}.$$

Die Gleichung der Extremalenschar ist somit

$$(10) \qquad \begin{aligned} r &= \mu \frac{k'}{k} \frac{1}{\operatorname{cn}(u,k)} = \varrho(u,k,b), \\ \varphi &= u + b \qquad\quad = \varphi(u,k,b). \end{aligned}$$

In beiden Fällen (*a*) und (*b*) ist u auf ein Wertgebiet zu beschränken, in dem r endlich bleibt, etwa auf das Gebiet

$$(11) \qquad -K+0 \leqq u \leqq +K-0.$$

Wir gehen zur Diskussion der konjugierten Punkte über, zunächst im Falle

(**a**) Den Gleichungen (6) zufolge erhält man für die partiellen Ableitungen der Funktionen ϱ und φ mit Benutzung der Formel IV der Einleitung

$$\varrho_u = \mu k' \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u^2}, \qquad \varrho_b = 0,$$

$$\varrho_k = -\mu \frac{k}{k'} \operatorname{tn} u + \mu k' \frac{-\frac{1}{kk'^2} E(u) \operatorname{dn} u + \frac{1}{k} u \operatorname{dn} u + \frac{k}{k'^2} \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u}{\operatorname{cn} u^2},$$

$$\varphi_u = k, \qquad \varphi_k = u, \qquad \varphi_b = 1,$$

mithin

$$\vartheta_2(u) = -\varrho_u,$$
$$\frac{\vartheta_1(u)}{\vartheta_2(u)} = \varphi_k - \frac{\varphi_u}{\varrho_u}\varrho_k = \frac{1}{k'^2}E(u).$$

Einen zu $P(v)$ konjugierten Punkt $Q(u)$, dessen Parameter u hiernach der Gleichung

(12) $$E(u) = E(v)$$

genügen müsste, gibt es nicht, da die wegen

$$\frac{dE(u)}{du} = \mathrm{dn}\,u^2 > 0$$

beständig wachsende und für endliche reelle u endliche Funktion $E(u)$ jeden Wert $E(v)$ nur einmal annimmt.

Im Falle (a) ist die Bewegung also oszillierend nicht stabil. Fig. 13 gibt das Bild der Kurve (M. E. 1 cm, $\mu = 1$, $k^2 = \frac{1}{2}$, $b = 0$).

Im Falle

(**b**) bekommen wir aus (10) mit Benutzung der Formel II der Einleitung

$$\varrho_u = \mu\frac{k'}{k}\frac{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{cn}\,u^2}, \qquad \varrho_b = 0,$$

$$\varrho_k = -\frac{1}{k'k^2}\frac{\mu}{\mathrm{cn}\,u} + \mu\frac{k'}{k}\frac{-\frac{1}{kk'^2}E(u)\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u + \frac{1}{k}u\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u + \frac{k}{k'^2}\mathrm{sn}\,u^2\,\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{cn}\,u^2},$$

$$\varphi_u = 1, \qquad \varphi_k = 0, \qquad \varphi_b = 1,$$

$$\vartheta_2(u) = -\varrho_u,$$
$$\frac{\vartheta_1(u)}{\vartheta_2(u)} = \frac{1}{kk'^2}\frac{\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{sn}\,u} + \frac{1}{kk'^2}E(u) - \frac{1}{k}u.$$

Die Gleichung zur Bestimmung des zu $P(v)$ konjugierten Punktes $Q(u)$

(13) $$\begin{aligned}&\frac{1}{k}u - \frac{1}{kk'^2}E(u) - \frac{1}{kk'^2}\frac{\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{sn}\,u}\\ &= \frac{1}{k}v - \frac{1}{kk'^2}E(v) - \frac{1}{kk'^2}\frac{\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{dn}\,v}{\mathrm{sn}\,v}\end{aligned}$$

hat auch hier keine von $u = v$ verschiedene Lösung u. Denn die Ableitung der linken Seite $\chi(u)$ der Gleichung (13) ist

(14) $$\chi'(u) = \frac{\mathrm{dn}\,u^2}{kk'^2\,\mathrm{sn}\,u^2} > 0,$$

$\chi(u)$ ist also eine beständig wachsende Funktion. Im Intervalle (11) ist

$$\chi(-K) = \frac{1}{k k'^2}(E - k'^2 K),\ \chi(-0) = +\infty,$$

$$\chi(+0) = -\infty,\ \chi(+K) = -\frac{1}{k k'^2}(E - k'^2 K),$$

und 0 ist die einzige Unendlichkeitsstelle der Funktion $\chi(u)$ in (11). Aus dem Werte des Differentialquotienten

$$\frac{d}{du}\left(E(u) - k'^2 u\right) = k^2 \operatorname{cn} u^2$$

d. h. der Tatsache, dass $E(u) - k'^2 u$ eine beständig wachsende Funktion ist, schliesst man, da sie an der Stelle $u = 0$ durch Null hindurchgeht, dass

$$E - k'^2 K > 0$$

ist. Daher hat man

$$\chi(-K) > 0,\ \chi(-0) = +\infty,\ \chi(+0) = -\infty,\ \chi(+K) < 0$$

und erkennt, dass jeder Wert $\chi(v)$, der im Intervalle (11) auftritt, in ihm nur einmal angenommen wird. Daher gibt es auf dem Extremalenbogen (10, 11) kein Paar konjugierter Punkte.

Die Bewegung ist also im Falle (b) ebenfalls oszillierend nicht stabil.

Fig. 14 gibt das Bild der Bahnkurve (M.E. 1 cm, $\mu = 1$, $k^2 = \frac{1}{2}$, b $= 0$).

In dem Übergangsfalle zwischen (a) und (b)

$$c^2 = \mu^2,\ k = 1,$$

in dem die Extremalengleichung

$$r = \frac{\mu}{\mathfrak{Sin}(\varphi - b)}$$

lautet, wird wegen der Ausartung der elliptischen Funktionen für $k = 1$

$$\operatorname{sn} u = \mathfrak{Tg} u,\ \operatorname{cn} u = \operatorname{dn} u = \frac{1}{\mathfrak{Cof} u},\ E(u) = \mathfrak{Tg} u$$

die Gleichung (11) des Falles (a) für den konjugierten Punkt

$$\mathfrak{Tg} u = \mathfrak{Tg} v, \tag{14}$$

und die Gleichung (12) des Falles (b)

$$\mathfrak{Tg} u + \frac{1}{\mathfrak{Sin} u\ \mathfrak{Cof} u} = \mathfrak{Tg} v + \frac{1}{\mathfrak{Sin} v\ \mathfrak{Cof} v},$$

$$\mathfrak{Ctg} u = \mathfrak{Ctg} v, \tag{15}$$

also, wie zu erwarten, mit (14) identisch. (14) bestätigt die Nichtexistenz konjugierter Punkte.

III. Kapitel.

Konjugierte Punkte und Enveloppen beim isoperimetrischen Problem.

§ 16. $\delta \int (y+\lambda)\sqrt{1-p^2}\,dx = 0.$

Obwohl bei dieser Aufgabe nur trigonometrische Funktionen auftreten, soll sie hier durchgerechnet werden, weil meines Wissens bisher nur zwei Beispiele für die Knesersche Theorie der konjugierten Punkte beim isoperimetrischen Problem in der Literatur behandelt vorliegen.[1])

Wir wollen den Integranden der isoperimetrischen Aufgaben im folgenden stets allgemein mit $h(x, y, p)$ bezeichnen, sodass im vorliegenden Falle

$$(y+\lambda)\sqrt{1-p^2} = h(x, y, p)$$

ist. Dann liefert die Eulersche Differentialgleichung (E_1) als notwendige Extremumsbedingung, weil der Integrand von x frei ist, aus

$$h_x - \frac{d}{dx}(h - p h_p) = 0$$

$$h - p h_p = \text{const} = a,$$

$$(y+\lambda)\frac{1}{\sqrt{1-p^2}} = a,$$

$$dx = \frac{a\,dy}{\sqrt{a^2-(y+\lambda)^2}}.$$

Mithin ist, wenn b eine Konstante bedeutet,

$$y + \lambda = a \sin\frac{x-b}{a}.$$

Soll die Extremalenschar durch einen festen Punkt $(x_0\, y_0)$ gehen, so tritt hierzu die Gleichung

$$y_0 + \lambda = a \sin\frac{x_0 - b}{a},$$

---

[1]) Kneser, L. d. V., § 40. Kneser, Konjugierte Punkte beim isoperimetrischen Problem, Jahresberichte der Schlesischen Gesellschaft für vaterländische Kultur 1906.

und durch Subtraktion fällt die Konstante λ heraus, sodass wir für die Schar durch den festen Punkt $(x_0\, y_0)$ bekommen

$$(1) \qquad y - y_0 = a\left(\sin\frac{x-b}{a} - \sin\frac{x_0-b}{a}\right) = \eta\,(x, a, b).$$

Das isoperimetrische Integral ist wegen

$$1 - p^2 = 1 - \cos\frac{x-b}{a}^2 = \sin\frac{x-b}{a}^2$$

$$\omega = \int_{x_0}^{x} \sqrt{1-p^2}\, dx = \int_{x_0}^{x} \sin\frac{x-b}{a}\, dx,$$

$$(2) \qquad \omega = a\left(\cos\frac{x_0-b}{a} - \cos\frac{x-b}{a}\right) = \omega\,(x, a, b).$$

Die Determinante Δ vereinfacht sich, weil als Parameter t die Abszisse x eingeführt, folglich

$$\xi_t = 1,\ \xi_a = \xi_b = 0$$

ist, auf

$$(3) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} \eta_a & \eta_b \\ \omega_a & \omega_b \end{vmatrix}.$$

Für ihre Elemente findet man, wenn man zur Abkürzung

$$(4) \qquad \frac{x-b}{a} = u,\ \frac{x_0-b}{a} = u_0$$

setzt,

$$(5_1) \qquad \eta_a = \sin u - \sin u_0 - (u\cos u - u_0 \cos u_0),$$

$$(5_2) \qquad \eta_b = -(\cos u - \cos u_0),$$

$$(5_3) \qquad \omega_a = -(\cos u - \cos u_0) - (u\sin u - u_0 \sin u_0),$$

$$(5_4) \qquad \omega_b = -(\sin u - \sin u_0).$$

Hiernach wird

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sin u - \sin u_0 - (u\cos u - u_0\cos u_0);\ -(\cos u - \cos u_0) \\ -(\cos u - \cos u_0) - (u\sin u - u_0 \sin u_0);\ -(\sin u - \sin u_0) \end{vmatrix}$$

$$= (u - u_0)\sin(u - u_0) - 2\left(1 - \cos(u - u_0)\right),$$

$$(6) \qquad \Delta = 4\sin\frac{u-u_0}{2}\left[\frac{u-u_0}{2}\cos\frac{u-u_0}{2} - \sin\frac{u-u_0}{2}\right]$$

$$= 4\sin\frac{x-x_0}{2a}\left[\frac{x-x_0}{2a}\cos\frac{x-x_0}{2a} - \sin\frac{x-x_0}{2a}\right].$$

Die Gleichungen (1), (6) folgen aus den entsprechenden beim

Problem der Kettenlinie[1]), indem man dort y, y_0, a, b durch $yi, y_0 i, ai, b + a\frac{\pi}{2}$ ersetzt.

Die erste Nullstelle von Δ ist durch den Wert

$$\frac{x - x_0}{2a} = \pi \tag{7}$$

gegeben, sie liefert den zu $(x_0\, y_0)$ im engeren Sinne konjugierten Punkt.

Wir greifen aus der zweiparametrigen Extremalenschar (1) eine einfach unendliche so heraus, dass die Enveloppe dieser Schar jede Extremale im konjugierten Punkte zu $(x_0\, y_0)$ berührt; dazu haben wir zwischen den beiden willkürlichen Konstanten a, b die Differentialgleichung[2])

$$\begin{vmatrix} \xi_t\, dt + \xi_a\, da + \xi_b\, db; & \xi_t\, dt \\ \eta_t\, dt + \eta_a\, da + \eta_b\, db; & \eta_t\, dt \end{vmatrix} = 0 \tag{8}$$

mit Berücksichtigung der Gleichung für den konjugierten Punkt zu integrieren. Sie wird, weil

$$\xi = x = t$$

eingeführt ist, einfach

$$\eta_a\, da + \eta_b\, db = 0. \tag{9}$$

Schreiben wir die Gleichung (1)

$$y = y_0 + 2a \sin\frac{x - x_0}{2a} \cos\frac{x + x_0 - 2b}{2a} = \eta\,(x, a, b), \tag{10}$$

so nimmt (9) die Gestalt an

$$\begin{aligned} &\left\{\left[\sin\frac{x - x_0}{2a} - \frac{x - x_0}{2a}\cos\frac{x - x_0}{2a}\right]\cos\frac{x + x_0 - 2b}{2a}\right. \\ &\left. + \sin\frac{x - x_0}{2a}\sin\frac{x + x_0 - 2b}{2a}\,\frac{x + x_0 - 2b}{2a}\right\} da \\ &+ \sin\frac{x - x_0}{2a}\sin\frac{x + x_0 - 2b}{2a}\,db = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Für den konjugierten Punkt im engeren Sinn (7) vereinfacht sich diese Gleichung auf

$$da = 0,\quad a = \text{const}, \tag{12}$$

wir wählen etwa

$$a = 1. \tag{13}$$

---

[1]) Kneser, L. d. V., § 38.
[2]) Kneser, L. d. V., § 40.

Die ausgezeichnete einparametrige Extremalenschar ist mithin nach (10).

$$(14) \qquad y = y_0 + 2 \sin \frac{x - x_0}{2} \cos\left(\frac{x - x_0}{2} + x_0 - b\right)$$
$$= y_0 + \sin(x - b) - \sin(x_0 - b).$$

Für die Enveloppe dieser Schar ist zufolge (7)

$$(15) \qquad \frac{x - x_0}{2} = \pi,$$

dann lehrt (14)

$$(16) \qquad y = y_0$$

Die Enveloppe artet also in den Punkt

$$(17) \qquad x = x_0 + 2\pi, \; y = y_0$$

aus.

Diese Ausartung findet bei jedem beliebigen Werte der Konstante a statt, der durchaus nicht gleich 1 zu sein braucht.

Unsere Extremalen (14) gehen also ausser durch $(x_0\, y_0)$ noch durch einen zweiten festen Punkt $(x_0 + 2\pi, \; y_0)$. Die doppelte Evoluteneigenschaft der Enveloppe[1]) besagt jetzt, dass die Integrale

$$(18) \qquad J = \int y \sqrt{1 - p^2}\, dx, \quad K = \int \sqrt{1 - p^2}\, dx$$

zwischen den beiden festen Punkten für alle Extremalen denselben Wert haben müssen. Wir wollen es bestätigen. Aus (14) folgt

$$p = \frac{dy}{dx} = \cos(x - b), \quad \sqrt{1 - p^2} = \sin(x - b),$$

mithin ist

$$(19) \qquad \bar{J}_{01} = \int_{x_0}^{x_0 + 2\pi} y \sqrt{1 - p^2}\, dx$$
$$= \int_{x_0}^{x_0 + 2\pi} \left[y_0 + \sin(x - b) - \sin(x_0 - b)\right] \sin(x - b)\, dx = \pi,$$

das Integral hat wirklich einen von dem speziellen Werte des Parameters b der Extremale unabhängigen Wert. Dasselbe gilt für

$$(20) \qquad \bar{K}_{01} = \int_{x_0}^{x_0 + 2\pi} \sqrt{1 - p^2}\, dx = \int_{x_0}^{x_0 + 2\pi} \sin(x - b)\, dx = 0.$$

[1]) Kneser, L. d. V., § 40.

Fig. 15 (M. E. 1 cm) zeigt drei Extremalen $\left(x_0 = y_0 = 0, b = \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)$.

Interessanter ist der konjugierte Punkt im weiteren Sinne, der nach (6) wieder durch die Gleichung

$$v = \operatorname{tg} v, \quad v = \frac{u - u_0}{2} = \frac{x - x_0}{2a} \tag{21}$$

gegeben ist; ihre Lösung ist

$$v = \frac{x - x_0}{2a} = T = 4{,}4934\ldots \tag{22}$$

Auf jeder Extremalen kommen wir zu dem zum Nullpunkte konjugierten Punkte auf endlichem Wege.

Die Gleichung (11), die aus der Doppelschar von Extremalen alle einfachen Scharen herausgreift, die eine Enveloppe besitzen, vereinfacht sich mit Benutzung von (21), (22) auf

$$\frac{x + x_0 - 2b}{2a}\,da + db = 0, \quad \left(\frac{x - x_0}{2a} + \frac{x_0 - b}{a}\right) da + db = 0,$$

$$\frac{T}{a}\,da + \frac{x_0}{a^2}\,da - \frac{b\,da - a\,db}{a^2} = 0,$$

$$T d \log a - d\frac{x_0 - b}{a} = 0. \tag{23}$$

Die Integration der Gleichung (23) mit der Wertentsprechung

$$a = 1, \quad b = x_0$$

liefert

$$T \log a = \frac{x_0 - b}{a}, \tag{24}$$

und damit verwandelt sich die zweiparametrige Extremalenschar (10) in die einparametrige

$$y = y_0 + 2 \sin \frac{x - x_0}{2a} \cos\left(\frac{x - x_0}{2a} + T \log a\right). \tag{25}$$

Ihre Enveloppe, längs deren nach (22) überall

$$\frac{x - x_0}{2a} = T$$

sein muss, erhält man, wenn man in (25)

$$a = \frac{x - x_0}{2T}$$

einsetzt; daher ist, wenn wie früher

$$\sin T = S, \quad \cos T = C$$

gesetzt wird,

(26) $$y = y_0 + C(x - x_0)\cos\left(T + T\log\frac{x - x_0}{2T}\right)$$

die Enveloppengleichung.

In Fig. 16 (Masse: Abszissen $20^0 = 1$ cm, Ordinateneinheit 5 cm) sind drei Extremalen $\left(x_0 = y_0 = 0,\ a = 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3}\right)$ und die Enveloppe gezeichnet.

Auch hier lässt sich die doppelte Evoluteneigenschaft der Enveloppe

A. $$\bar{K}_{01} + K_{12} = \bar{K}_{02}$$

B. $$\bar{J}_{01} + J_{12} = \bar{J}_{02}$$

leicht bestätigen.

A. Das isoperimetrische Integral, längs einer Extremalen $\mathfrak{E}_1$ vom Ausgangspunkte 0 bis zu einem beliebigen Punkte 1 ausgerechnet, hat, wenn a_1 ihr Parameter ist, den Wert

$$\bar{K}_{01} = \int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1 - p^2}\,dx = \int_{x_0}^{x_1}\sin\left(\frac{x - x_0}{a_1} + T\log a_1\right)dx,$$

(27) $$\bar{K}_{01} = a_1\left[\cos(T\log a_1) - \cos\left(\frac{x_1 - x_0}{a_1} + T\log a_1\right)\right].$$

Ist speziell 1 der zu 0 auf $\mathfrak{E}_1$ konjugierte Punkt, also

$$\frac{x_1 - x_0}{2a_1} = T,$$

so wird

(28) $$\bar{K}_{01} = C(x_1 - x_0)\sin\left(T + T\log\frac{x_1 - x_0}{2T}\right).$$

Entsprechend ist, wenn 2 den zu 0 konjugierten Punkt auf einer anderen Extremalen $\mathfrak{E}_2$ bedeutet,

(29) $$\bar{K}_{02} = C(x_2 - x_0)\sin\left(T + T\log\frac{x_2 - x_0}{2T}\right).$$

Durch Integration zwischen den Punkten 1, 2 der Enveloppe erhält man, weil für diese nach (26)

$$p = \frac{\delta y}{\delta x} = \cos\left(2T + T\log\frac{x - x_0}{2T}\right)$$

ist,

(30) $$K_{12} = \int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1 - p^2}\,dx = \int_{x_1}^{x_2}\sin\left(2T + T\log\frac{x - x_0}{2T}\right)dx$$

$$= \sin 2T\int_{x_1}^{x_2}\cos\left(T\log\frac{x - x_0}{2T}\right)dx + \cos 2T\int_{x_1}^{x_2}\sin\left(T\log\frac{x - x_0}{2T}\right)dx.$$

Mit der Substitution

$$T\log\frac{x-x_0}{2T}=z$$

führt man die letzten beiden Integrale auf zwei bekannte andere zurück,

$$\int\cos\left(T\log\frac{x-x_0}{2T}\right)dx=2\int e^{\frac{z}{T}}\cos z\,dz,$$

$$\int\sin\left(T\log\frac{x-x_0}{2T}\right)dx=2\int e^{\frac{z}{T}}\sin z\,dz,$$

und setzt man deren Werte

$$\int e^{\frac{z}{T}}\cos z\,dz=\frac{T}{1+T^2}e^{\frac{z}{T}}(\cos z+T\sin z),$$

$$\int e^{\frac{z}{T}}\sin z\,dz=\frac{T}{1+T^2}e^{\frac{z}{T}}(\sin z-T\cos z)$$

in (30) ein, so findet sich nach elementarer Zwischenrechnung

$$(31)\quad K_{12}=C(x_2-x_0)\sin\left(T+T\log\frac{x_2-x_0}{2T}\right)$$
$$-C(x_1-x_0)\sin\left(T+T\log\frac{x_1-x_0}{2T}\right).$$

Die Kombination von (28), (29), (31) beweist die Gleichung A.

B. Integrieren wir längs einer Extremalen $\mathfrak{E}_1$ vom gemeinsamen Ausgangspunkte 0 bis zu einem beliebigen Punkte (1), so finden wir für das zum Extremum zu machende Integral

$$\bar{J}_{01}=\int_{x_0}^{x_1}y\sqrt{1-p^2}\,dx=\int_{x_0}^{x_1}\left\{y_0+a_1\left[\sin\left(\frac{x-x_0}{a_1}+T\log a_1\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.-\sin(T\log a_1)\right]\right\}\sin\left(\frac{x-x_0}{a_1}+T\log a_1\right)dx$$

$$(32)\qquad \bar{J}_{01}$$
$$=a_1\left[y_0-a_1\sin(T\log a_1)\right]\left[\cos(T\log a_1)-\cos\left(\frac{x_1-x_0}{a_1}+T\log a_1\right)\right]$$
$$+a_1^2\left[\frac{x_1-x_0}{2a_1}-\frac{1}{4}\sin\left(2\frac{x_1-x_0}{a_1}+2T\log a_1\right)+\frac{1}{4}\sin(2T\log a_1)\right].$$

Ist speziell 1 der zu 0 auf $\mathfrak{E}_1$ konjugierte Punkt, also

$$a_1=\frac{x_1-x_0}{2T},$$

so erhält man nach einigen Umformungen

$$(33)\quad \bar{J}_{01} = C y_0 (x_1 - x_0) \sin\left(T + T \log \frac{x_1 - x_0}{2T}\right) + \left(\frac{x_1 - x_0}{2T}\right)^2 \left[T - SC + 2S^3 C \cos\left(2T \log \frac{x_1 - x_0}{2T}\right) + S^2 (2C^2 - 1) \sin\left(2T \log \frac{x_1 - x_0}{2T}\right)\right]$$

und entsprechend $\bar{J}_{02}$.

Durch Integration zwischen den Punkten 1, 2 der Enveloppe findet man

$$J_{12} = \int_{x_1}^{x_2} y \sqrt{1 - \left(\frac{\delta y}{\delta x}\right)^2}\, dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \left[y_0 + C(x - x_0) \cos\left(T + T \log \frac{x - x_0}{2T}\right)\right] \sin\left(2T + T \log \frac{x - x_0}{2T}\right) dx,$$

$$J_{12} = y_0 K_{12} + C\left(SC^2 - \frac{S}{2} + S^3\right) \int_{x_1}^{x_2} (x - x_0)\, dx + C(2SC^2 + S - 2S^3) \int_{x_1}^{x_2} \frac{x - x_0}{2} \cos\left(2T \log \frac{x - x_0}{2T}\right) dx + C(C - 4S^2 C) \int_{x_1}^{x_2} \frac{x - x_0}{2} \sin\left(2T \log \frac{x - x_0}{2T}\right) dx.$$

Mit der Substitution

$$\left(\frac{x - x_0}{2T}\right)^2 = u, \quad \left(\frac{x_1 - x_0}{2T}\right)^2 = u_1, \quad \left(\frac{x_2 - x_0}{2T}\right)^2 = u_2$$

ergibt sich

$$J_{12} = y_0 K_{12} + \left(2S^3 C - \frac{S^3}{C} + 2\frac{S^5}{C}\right) \left(\frac{x - x_0}{2T}\right)^2 \Big|_{x_1}^{x_2} + \left(2S^3 C + \frac{S^3}{C} - 2\frac{S^5}{C}\right) \int_{u_1}^{u_2} \cos(T \log u)\, du + (S^2 - 4S^4) \int_{u_1}^{u_2} \sin(T \log u)\, du.$$

Setzt man die unter A für die beiden letzten Integrale ausgerechneten Werte hierin ein, so erhält man nach einfacher Zwischenrechnung

$$(34)\qquad J_{12} = C y_0 (x - x_0) \sin\left(T + T\log\frac{x-x_0}{2T}\right)\Big|_{x_1}^{x_2} + \left(\frac{x-x_0}{2T}\right)^2 \left[T - SC + 2S^3 C\cos\left(2T\log\frac{x-x_0}{2T}\right) + S^2(2C^2-1)\sin\left(2T\log\frac{x-x_0}{2T}\right)\right]\Big|_{x_1}^{x_2}.$$

Die Gleichungen (33) und (34) verifizieren die Behauptung B.

Der ausgezeichnete einparametrige räumliche Extremalenbüschel[1]) ist nach (25), (27) gegeben durch

$$(35)\qquad \begin{aligned} y &= y_0 + 2a\sin\frac{x-x_0}{2a}\cos\left(\frac{x-x_0}{2a} + T\log a\right) = \eta(x,a), \\ z &= a\left[\cos(T\log a) - \cos\left(\frac{x-x_0}{a} + T\log a\right)\right] = \omega(x,a); \end{aligned}$$

aus (26), (31) entnimmt man die Gleichungen seiner räumlichen Enveloppe

$$(36)\qquad \begin{aligned} y &= y_0 + C(x-x_0)\cos\left(T + T\log\frac{x-x_0}{2T}\right), \\ z &= C y_0 (x-x_0)\sin\left(T + T\log\frac{x-x_0}{2T}\right). \end{aligned}$$

§ 17. $\delta\int(p^2 + \lambda y^4)\,dx = 0$.

Diese Aufgabe wurde dadurch nahegelegt, dass Bolza das Problem

$$\delta\int(p^2 + \lambda y^2)\,dx = 0$$

anführt.[2])

Bei der vorliegenden Aufgabe liefert die Eulersche Differentialgleichung (E_1)

$$h - ph_p = \lambda y^4 - p^2 = \text{const};$$

wir wollen uns auf negative Werte von λ beschränken, dann können wir

$$\lambda = -\frac{1}{a^2}$$

setzen und die rechts auftretende Konstante, die sicher negativ ist, mit $-\frac{c^4}{a^2}$ bezeichnen,

---

[1]) Kneser, L. d. V. § 38, § 40.

[2]) V. ü. V., p. 533, Aufg. 15.

$$-\frac{1}{a^2}y^4 - p^2 = -\frac{c^4}{a^2}.$$

Hieraus folgt

$$dx = \frac{a\,dy}{\sqrt{c^4 - y^4}},$$

und als Gleichung der zweiparametrigen durch den Nullpunkt als festen Punkt gehenden Extremalenschar ergibt sich durch dieselbe Rechnung wie in §§ 3, 7

$$(1) \qquad y = c\,\mathrm{cn}\left(\frac{c\sqrt{2}}{a}x - K\right).$$

Dabei handelt es sich um den harmonischen Fall der elliptischen Funktionen.

Wird

$$\frac{c\sqrt{2}}{a}x = u$$

gesetzt, so erhalten wir für das isoperimetrische Integral

$$\int_0^x y^4\,dx = \frac{a\,c^3}{\sqrt{2}}\int_0^u \mathrm{cn}\,(u - K)^4\,du,$$

wenn wir § 3, (12) benutzen,

$$(2) \qquad \omega = \frac{a\,c^3}{3\sqrt{2}}\left(u - \frac{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{dn}\,u^3}\right).$$

Die räumliche Extremalenschar durch den Nullpunkt ist hiernach

$$(3) \qquad \begin{aligned} x &= \frac{a\,u}{c\sqrt{2}} && = \xi\,(u, a, c), \\ y &= \frac{c}{\sqrt{2}}\frac{\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{dn}\,u} && = \eta\,(u, a, c), \qquad k^2 = \frac{1}{2}. \\ z &= \frac{a\,c^3}{3\sqrt{2}}\left(u - \frac{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{dn}\,u^3}\right) && = \omega\,(u, a, c), \end{aligned}$$

Die Elemente der zur Bestimmung des konjugierten Punktes dienenden Determinante sind

$$\xi_u = \frac{a}{c\sqrt{2}}, \qquad \eta_u = \frac{c\,\mathrm{cn}\,u}{\sqrt{2}\,\mathrm{dn}\,u^2}, \qquad \omega_u = \frac{a\,c^3}{4\sqrt{2}}\frac{\mathrm{sn}\,u^4}{\mathrm{dn}\,u^4},$$

$$\xi_a = \frac{u}{c\sqrt{2}}, \qquad \eta_a = 0, \qquad \omega_a = \frac{c^3}{3\sqrt{2}}\left(u - \frac{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{dn}\,u^3}\right),$$

$$\xi_c = -\frac{a}{\sqrt{2}\,c^2}u, \qquad \eta_c = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{dn}\,u}, \qquad \omega_c = \frac{a\,c^2}{\sqrt{2}}\left(u - \frac{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{dn}\,u^3}\right),$$

folglich ergibt sich durch einfache Rechnung für die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \xi_u & \xi_a & \xi_c \\ \eta_u & \eta_a & \eta_c \\ \omega_u & \omega_a & \omega_c \end{vmatrix}$$

selbst, indem man etwa nach den Elementen der ersten Kolonne entwickelt,

$$(4)\quad \Delta = -\frac{ac^3}{24\sqrt{2}}\frac{1}{\mathrm{dn}u^5}\big[16u^2\,\mathrm{cn}u\,\mathrm{dn}u^3 + u\,\mathrm{sn}u\,(4\,\mathrm{dn}u^4 - 16\,\mathrm{cn}u^2 - 3\,\mathrm{sn}u^4) - 4\,\mathrm{sn}u^2\,\mathrm{cn}u\,\mathrm{dn}u\big].$$

Da

$$\Delta(0) = 0,\ \Delta(K) = \frac{1}{3}ac^3K > 0,\ \Delta(2K) = \frac{\sqrt{2}}{3}ac^3K^2 > 0,$$

$$\Delta(3K) = -ac^3K < 0$$

ist, so liegt bestimmt mindestens eine Nullstelle von Δ zwischen den Werten $u = 2K$ und $u = 3K$,

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin\varphi^2}} = 1{,}8541\ldots;$$

sie hat für alle Extremalen denselben Wert, denn sie ist durch die wegen des konstanten Modulwertes $\frac{1}{\sqrt{2}}$ von keinem Parameter abhängige Gleichung

$$(5)\quad 16u^2\,\mathrm{cn}u\,\mathrm{dn}u^3 + u\,\mathrm{sn}u\,(4\,\mathrm{dn}u^4 - 16\,\mathrm{cn}u^2 - 3\,\mathrm{sn}u^4) - 4\,\mathrm{sn}u^2\,\mathrm{cn}u\,\mathrm{dn}u = 0$$

gegeben.

Bezeichnet man die linke Seite von (5) mit $F(u)$, so zeigen die Wertepaare

u	$F(u)$
5,4636	− 0,57
5,4883	+ 2,284 ,

dass der Wert

$$(6)\quad v = 5{,}46\ldots$$

eine zwischen $2K$ und $3K$ gelegene Nullstelle von Δ ist. Doch ist nicht ohne weiteres zu übersehen, ob v die erste auf $u = 0$ folgende Nullstelle der Determinante Δ ist. Diese Frage wird durch eine Bemerkung entschieden, die von Herrn Lindemann,

einem Mitgliede des von Herrn Geheimrat Kneser im W. S. 1910/11 abgehaltenen Seminars über Variationsrechnung, herrührt:

Man kann aus der Determinante $\Delta(u)$ der isoperimetrischen Probleme durch Division mit einer Funktion $\mathfrak{D}(u)$ eine Funktion $\varphi(u)$ gewinnen, deren Ableitung ein vollständiges Quadrat ist, über deren Verhalten daher sofort bestimmte Aussagen möglich sind.

Im vorliegenden Falle betrachten wir, nachdem wir Δ durch elementare Rechnung auf die Form

$$\Delta = \frac{ac^3}{\sqrt{2}} \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u^2} \left[\frac{1}{2} (u + \operatorname{tn} u \operatorname{dn} u) \left(\frac{2}{3} u + \frac{1}{3} \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u^3} \right) - u^2 \right]$$

gebracht haben, die mit

$$\mathfrak{D}(u) = \frac{ac^3}{2\sqrt{2}} \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u^2} (u + \operatorname{tn} u \operatorname{dn} u)$$

dividierte Determinante

$$(7) \qquad \varphi(u) = \frac{\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u^3} \right) \frac{1}{2} (u + \operatorname{tn} u \operatorname{dn} u) - u^2}{\frac{1}{2} (u + \operatorname{tn} u \operatorname{dn} u)}$$

$$= \frac{2}{3} u + \frac{1}{3} \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u^3} - \frac{2u^2}{u + \operatorname{tn} u \operatorname{dn} u}.$$

Zähler und Nenner von $\varphi(u)$ können ausser für $u = 0$ nie gleichzeitig verschwinden, und die Pole des Nenners $\psi(u)$ (vgl. § 7) sind keine Wurzeln von $\varphi(u)$, denn man hat

$$\varphi\left[(2n+1)K\right] = \frac{2}{3} (2n+1) K, \quad n = 0, 1, 2, 3 \ldots .$$

Folglich haben Δ und $\varphi(u)$ genau dieselben Nullstellen.

Die Ableitung von $\varphi(u)$ ist, wie man mit Hilfe der leicht zu verifizierenden Formeln

$$\frac{d}{du} \left[\frac{1}{2} (u + \operatorname{tn} u \operatorname{dn} u) \right] = \frac{\operatorname{dn} u^4}{\operatorname{cn} u^2}, \quad \frac{d}{du} \left(\frac{2}{3} u + \frac{1}{3} \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u^3} \right) = \frac{\operatorname{cn} u^2}{\operatorname{dn} u^4}$$

findet,

$$\varphi'(u) = \frac{\operatorname{cn} u^2}{\operatorname{dn} u^4} - \frac{4u (u + \operatorname{tn} u \operatorname{dn} u) - 4u^2 \frac{\operatorname{dn} u^4}{\operatorname{cn} u^2}}{(u + \operatorname{tn} u \operatorname{dn} u)^2}$$

$$= \frac{\left[\frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u^2} (u + \operatorname{tn} u \operatorname{dn} u) \right]^2 - 2 \cdot \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u^2} (u + \operatorname{tn} u \operatorname{dn} u) \cdot 2u \frac{\operatorname{dn} u^2}{\operatorname{cn} u} + \left(2u \frac{\operatorname{dn} u^2}{\operatorname{cn} u} \right)^2}{(u + \operatorname{tn} u \operatorname{dn} u)^2}$$

$$(8) \qquad \varphi'(u) = \left(\frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u^2} - 2\,\frac{u \operatorname{dn} u^2}{\operatorname{sn} u + u \operatorname{cn} u}\right)^2.$$

$\varphi(u)$ ist hiernach eine beständig wachsende Funktion. Im Intervalle

$$0 \leqq u < 3K$$

hat sie eine einzige Unendlichkeitsstelle, nämlich die einzige in diesem Intervalle gelegene Wurzel u^* der Funktion

$$\psi(u) = \operatorname{tn} u \operatorname{dn} u + u,$$

$$u^* = 2{,}29 \ldots .$$

(vgl. § 7). Die erste auf $u = 0$ folgende Nullstelle der Funktion $\varphi(u)$ muss also grösser als u^* sein. Nun hat Δ eine Wurzel v im Intervalle

$$2K \leqq u \leqq 3K,$$

folglich, da Δ und $\varphi(u)$ genau dieselben Nullstellen haben, auch $\varphi(u)$; da diese aber nach dem früheren die erste auf $u = 0$ folgende Wurzel von $\varphi(u)$ sein muss, so ist v auch die erste positive Wurzel von Δ.

Die für alle Extremalen konstante Grösse $u = v$ liefert auf jeder Extremalen den ersten zum Nullpunkte konjugierten Punkt. Aus der Doppelschar von Extremalen (3) greift, wie in § 16 (8), die Differentialgleichung

$$(9) \qquad (\xi_u \eta_a - \xi_a \eta_u)\, da + (\xi_u \eta_c - \xi_c \eta_u)\, dc = 0$$

alle einfachen Scharen heraus, die eine Enveloppe besitzen. Bildet man den Ausdruck (9) für den vorliegenden Fall, so erhält man mit Berücksichtigung der Gleichung für den konjugierten Punkt

$$u = v = \text{const}$$

$$(10) \qquad \frac{v}{v + \operatorname{tn} v \operatorname{dn} v}\,\frac{da}{a} - \frac{dc}{c} = 0,$$

und durch Integration mit der Wertentsprechung $a = 1$, $c = 1$ findet man als Beziehung zwischen den Parametern a, c

$$(11) \qquad c = a^{\frac{v}{v + \operatorname{tn} v \operatorname{dn} v}}.$$

Setzt man diesen Wert von c in (3) ein, so erhält man den ausgezeichneten einfachen räumlichen Extremalenbüschel

$$(12) \qquad \begin{aligned} x &= a^{\frac{\operatorname{tn} v \operatorname{dn} v}{v + \operatorname{tn} v \operatorname{dn} v}}\,\frac{u}{\sqrt{2}} && = \xi(u, a), \\ y &= \frac{1}{\sqrt{2}}\, a^{\frac{v}{v + \operatorname{tn} v \operatorname{dn} v}}\,\frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u} && = \eta(u, a), \quad k^2 = \frac{1}{2}. \\ z &= \frac{1}{3\sqrt{2}}\, a^{1 + \frac{3v}{v + \operatorname{tn} v \operatorname{dn} v}} \left(u - \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u^3}\right) && = \omega(u, a), \end{aligned}$$

Die Gleichung der Enveloppe dieser Schar, zunächst in der Projektion auf die x, y-Ebene, findet man, indem man aus der Gleichung des konjugierten Punktes

$$u = v$$

in (12_1) einsetzt,

$$x = a^{\frac{\operatorname{tn} v \operatorname{dn} v}{v + \operatorname{tn} v \operatorname{dn} v}} \frac{v}{\sqrt{2}},$$

a ausrechnet,

$$a = \left(\frac{x\sqrt{2}}{v}\right)^{\frac{v + \operatorname{tn} v \operatorname{dn} v}{\operatorname{tn} v \operatorname{dn} v}}, \tag{13}$$

und diesen Wert in (12_2) einführt,

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\operatorname{sn} v}{\operatorname{dn} v} \left(\frac{x\sqrt{2}}{v}\right)^{\frac{v}{\operatorname{tn} v \operatorname{dn} v}}. \tag{14}$$

Fig. 17 (M.E. 1 cm) zeigt drei Extremalen ($a = 1, 2, 3$) und die Enveloppe (14) in der x, y-Ebene.

Wir wollen die doppelte Evoluteneigenschaft der Enveloppe

A. $$\bar{K}_{01} + K_{12} = \bar{K}_{02},$$

B. $$\bar{J}_{01} + J_{12} = \bar{J}_{02}$$

bestätigen.

A. In den immer angewandten Bezeichnungen ist nach (12)

$$\bar{K}_{01} = \int_0^x y^4 \, dx = \frac{1}{3\sqrt{2}} a^{1 + \frac{3v}{v + \operatorname{tn} v \operatorname{dn} v}} \left(u - \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u^3}\right); \tag{15}$$

wenn speziell 1 der zu 0 konjugierte Punkt ist, erhält man mit Berücksichtigung von (13)

$$\bar{K}_{01} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \left(\frac{x_1\sqrt{2}}{v}\right)^{\frac{4v}{\operatorname{tn} v \operatorname{dn} v} + 1} \left(v - \frac{\operatorname{sn} v \operatorname{cn} v}{\operatorname{dn} v^3}\right), \tag{16}$$

entsprechend für eine zweite Extremale

$$\bar{K}_{02} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \left(\frac{x_2\sqrt{2}}{v}\right)^{\frac{4v}{\operatorname{tn} v \operatorname{dn} v} + 1} \left(v - \frac{\operatorname{sn} v \operatorname{cn} v}{\operatorname{dn} v^3}\right). \tag{17}$$

Für das zwischen den Punkten 1 und 2 längs der Enveloppe genommene Integral ergibt sich

$$K_{12} = \int_{x_1}^{x_2} y^4\,dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{4}\frac{\operatorname{sn} v^4}{\operatorname{dn} v^4}\left(\frac{x\sqrt{2}}{v}\right)^{\frac{4v}{\operatorname{tn} v \operatorname{dn} v}} dx$$

$$= \frac{1}{4}\frac{\operatorname{sn} v^4}{\operatorname{dn} v^4}\frac{v}{\sqrt{2}}\frac{\operatorname{tn} v \operatorname{dn} v}{4v + \operatorname{tn} v \operatorname{dn} v}\left[\left(\frac{x_2\sqrt{2}}{v}\right)^{\frac{4v}{\operatorname{tn} v \operatorname{dn} v}+1} - \left(\frac{x_1\sqrt{2}}{v}\right)^{\frac{4v}{\operatorname{tn} v \operatorname{dn} v}+1}\right].$$

Da man aber die Gleichung (5) für den konjugierten Punkt leicht auf die Form bringt

$$\frac{1}{3}\left(v - \frac{\operatorname{sn} v \operatorname{cn} v}{\operatorname{dn} v^3}\right) = \frac{1}{4}\frac{\operatorname{sn} v^4}{\operatorname{dn} v^4}\frac{\operatorname{tn} v \operatorname{dn} v}{4v + \operatorname{tn} v \operatorname{dn} v},$$

so kann man hierfür schreiben

$$(18)\quad K_{12} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\left(v - \frac{\operatorname{sn} v \operatorname{cn} v}{\operatorname{dn} v^3}\right)\left[\left(\frac{x_2\sqrt{2}}{v}\right)^{\frac{4v}{\operatorname{tn} v \operatorname{dn} v}+1} - \left(\frac{x_1\sqrt{2}}{v}\right)^{\frac{4v}{\operatorname{tn} v \operatorname{dn} v}+1}\right],$$

und nun lehrt der Vergleich von (16), (17), (18)

$$\bar{K}_{01} + K_{12} = \bar{K}_{02}.$$

B. Wenn man mit 1 einen beliebigen Punkt einer Extremale bezeichnet, hat man

$$\bar{J}_{01} = \int_0^{x_1} p^2\,dx = \int_0^{x_1}\left(\frac{dy}{du}\right)^2\frac{du}{dx}\,du$$

$$= \int_0^{u}\left[-c \operatorname{sn}(u-K)\operatorname{dn}(u-K)\right]^2\sqrt{2}\,a^{-\frac{\operatorname{tn} v \operatorname{dn} v}{v + \operatorname{tn} v \operatorname{dn} v}}\,du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\,a^{\frac{2v - \operatorname{tn} v \operatorname{dn} v}{v + \operatorname{tn} v \operatorname{dn} v}}\int_0^{u}\left(1 - \operatorname{cn}(u-K)^4\right)du,$$

folglich, wenn man (2) benutzt,

$$(19)\quad \bar{J}_{01} = \frac{1}{3\sqrt{2}}a^{\frac{2v - \operatorname{tn} v \operatorname{dn} v}{v + \operatorname{tn} v \operatorname{dn} v}}\left(2u + \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u^3}\right).$$

Ist 1 der zu 0 konjugierte Punkt, also [vgl. (13)]

$$u = v,\quad a = \left(\frac{x_1\sqrt{2}}{v}\right)^{\frac{v + \operatorname{tn} v \operatorname{dn} v}{\operatorname{tn} v \operatorname{dn} v}},$$

so wird

$$(20)\quad \bar{J}_{01} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\left(\frac{x_1\sqrt{2}}{v}\right)^{\frac{2v}{\operatorname{tn} v \operatorname{dn} v}-1}\left(2v + \frac{\operatorname{sn} v \operatorname{cn} v}{\operatorname{dn} v^3}\right),$$

für eine zweite Extremale

$$(21)\quad \bar{J}_{02} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\left(\frac{x_2\sqrt{2}}{v}\right)^{\frac{2v}{\operatorname{tn} v \operatorname{dn} v}-1}\left(2v + \frac{\operatorname{sn} v \operatorname{cn} v}{\operatorname{dn} v^3}\right).$$

Durch Integration längs der Enveloppe zwischen den Punkten 1 und 2 ergibt sich nach (14)

$$J_{12} = \int_{x_1}^{x_2} p^2\,dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\delta y}{\delta x}\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\operatorname{sn} v^2}{\operatorname{dn} v^2}\,\frac{\sqrt{2}}{v}\left(\frac{v}{\operatorname{tn} v \operatorname{dn} v}\right)^2 \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{x\sqrt{2}}{v}\right)^{2\frac{v - \operatorname{tn} v \operatorname{dn} v}{\operatorname{tn} v \operatorname{dn} v}} d\left(\frac{x\sqrt{2}}{v}\right),$$

(22)
$$J_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{v \operatorname{sn} v \operatorname{cn} v}{\operatorname{dn} v^3}\,\frac{1}{2v - \operatorname{tn} v \operatorname{dn} v}\left[\left(\frac{x_2\sqrt{2}}{v}\right)^{\frac{2v - \operatorname{tn} v \operatorname{dn} v}{\operatorname{tn} v \operatorname{dn} v}} - \left(\frac{x_1\sqrt{2}}{v}\right)^{\frac{2v - \operatorname{tn} v \operatorname{dn} v}{\operatorname{tn} v \operatorname{dn} v}}\right].$$

Da sich die Gleichung (5) aber auch auf die Form bringen lässt

$$\frac{v \operatorname{sn} v \operatorname{cn} v}{\operatorname{dn} v^3}\,\frac{1}{2v - \operatorname{tn} v \operatorname{dn} v} = \frac{1}{3}\left(2v + \frac{\operatorname{sn} v \operatorname{cn} v}{\operatorname{dn} v^3}\right),$$

kann man (22) schreiben

(23) $$J_{12} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\left(2v + \frac{\operatorname{sn} v \operatorname{cn} v}{\operatorname{dn} v^3}\right)\left[\left(\frac{x_2\sqrt{2}}{v}\right)^{\frac{2v}{\operatorname{tn} v \operatorname{dn} v} - 1} - \left(\frac{x_1\sqrt{2}}{v}\right)^{\frac{2v}{\operatorname{tn} v \operatorname{dn} v} - 1}\right],$$

und aus (20), (21), (23) folgt die zu beweisende Gleichung B.

Aus (14), (18) entnimmt man als Gleichung der räumlichen Enveloppe der Schar (12)

$$x = \frac{v}{\sqrt{2}}\,u,$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{\operatorname{sn} v}{\operatorname{dn} v}\,u^{\frac{v}{\operatorname{tn} v \operatorname{dn} v}},$$

$$z = \frac{1}{3\sqrt{2}}\left(v - \frac{\operatorname{sn} v \operatorname{cn} v}{\operatorname{dn} v^3}\right) u^{\frac{4v}{\operatorname{tn} v \operatorname{dn} v} + 1}.$$

§ 18.

Bestimmung des Rotationskörpers von möglichst grossem Volumen bei gegebener Länge des Meridians.[1])

Diese Aufgabe wird gelöst durch den Ansatz

$$\delta \int (y^2 + \lambda \sqrt{1 + p^2})\,dx = 0.$$

[1]) Euler, Methodus inveniendi etc., Kap. V, 46.
Bolza, V. ü. V., p. 535, Aufg. 17; p. 540 f., Aufg. 34.

Aus der Eulerschen Differentialgleichung

$$(E_1) \qquad h - ph_p = y^2 + \frac{\lambda}{\sqrt{1+p^2}} = \text{const} = c$$

folgt als Differentialgleichung der Extremalen

$$(1) \qquad dx = \frac{(y^2 - c)\,dy}{\sqrt{\lambda^2 - (y^2 - c)^2}} = \frac{(y^2 - c)\,dy}{\sqrt{(\lambda - c + y^2)\,(\lambda + c - y^2)}}.$$

Wir wollen hier zwei Spezialfälle der Aufgabe betrachten, nämlich es soll die gesuchte Kurve

A. einen gegebenen Punkt mit dem Koordinatenanfangspunkt verbinden,

B. von einem gegebenen Punkte nach der x-Achse hin gezogen sein.

A. In (1) sind folgende Fälle zu unterscheiden:

I. $\lambda + c < 0$,

dann muss auch

$\lambda - c < 0$

sein.

II. $\lambda + c = 0$,

dann muss

$\lambda - c < 0$

sein.

III. $\lambda + c > 0$,

dann kann

(α) $\lambda - c > 0$,

(β) $\lambda - c = 0$,

(γ) $\lambda - c < 0$

sein.

Ausartungen der elliptischen Quadratur treten für

$$\lambda + c = 0 \text{ oder } \lambda - c = 0$$

auf. Im Falle I sind sie also ausgeschlossen. In den Fällen II, III (β), III (γ) können die Extremalen nicht durch den Koordinatenanfang gehen, diese Möglichkeiten kommen also für die spezielle Aufgabe A nicht in Betracht. Im Falle III (α) sind die Verhältnisse im wesentlichen dieselben wie im Falle I, sodass wir uns schliesslich auf diesen beschränken können.

Das Bogenelement der Extremalen (1)

$$ds = \frac{\lambda\,dy}{\sqrt{(\lambda - c + y^2)\,(\lambda + c - y^2)}}, \quad y^2 < -(\lambda - c)$$

ist ein elliptisches Differential erster Gattung. Um es auf die Normalform zu bringen, führen wir die positive Grösse

$$(2) \qquad z^2 = \frac{\lambda - c + y^2}{\lambda - c}$$

in die Rechnung ein und bekommen

$$ds = \frac{a}{\sqrt{2}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)\left(1-\frac{a^2+c}{2a^2}z^2\right)}},$$

wenn die bei der Annahme I negative Grösse

$$\lambda = -a^2, \quad a^2 > |c|$$

gesetzt wird. Nun können wir den positiven echten Bruch

$$\frac{a^2+c}{2a^2} = \frac{1}{2} + \frac{c}{2a^2} = k^2$$

setzen, dann folgt

$$z = \operatorname{sn}\left(\frac{s\sqrt{2}+b}{a}, k\right),$$

wenn b Integrationskonstante ist, und nach (2)

$$y = ak\sqrt{2}\operatorname{cn}\frac{s\sqrt{2}+b}{a}.$$

Die Konstante b wählen wir so, dass für $y = 0$ auch $s = 0$ ist, nämlich

$$b = aK = a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}},$$

$$(3) \qquad y = ak\sqrt{2}\operatorname{cn}\left(\frac{s\sqrt{2}}{a}+K\right).$$

Jetzt folgt aus (1), da die Extremalen durch den Nullpunkt gehen sollen, für $y = s = 0$ also auch $x = 0$ sein muss, wegen

$$dx = -\frac{ds}{a^2}\left[2a^2k^2\operatorname{cn}\left(\frac{s\sqrt{2}}{a}+K\right)^2 - a^2(2k^2-1)\right]$$

$$= -\left[2\operatorname{dn}\left(\frac{s\sqrt{2}}{a}+K\right)^2 - 1\right]ds$$

$$(4) \qquad x = -a\sqrt{2}\left[E\left(\frac{s\sqrt{2}}{a}+K\right) - E\right] + \frac{a}{\sqrt{2}}\frac{s\sqrt{2}}{a}.$$

Benützt man die Formeln

$$\operatorname{cn}(v+K) = -k'\frac{\operatorname{sn}v}{\operatorname{dn}v}, \quad E(v+K) = E(v) + E - k^2\frac{\operatorname{sn}v\operatorname{cn}v}{\operatorname{dn}v}$$

und setzt noch

$$\frac{s\sqrt{2}}{a} = u,$$

so liefern (3) und (4) die räumliche Doppelschar von Extremalen durch den Nullpunkt

$$(5)\qquad \begin{aligned} x &= \frac{a}{\sqrt{2}}u - a\sqrt{2}\left(E(u) - k^2\frac{\operatorname{sn}u\operatorname{cn}u}{\operatorname{dn}u}\right) = \xi(u,a,k),\\ y &= -akk'\sqrt{2}\,\frac{\operatorname{sn}u}{\operatorname{dn}u} \qquad\qquad = \eta(u,a,k),\\ z &= \frac{a}{\sqrt{2}}u \qquad\qquad = \omega(u,a,k).\ ^{1}) \end{aligned}$$

Die Funktionaldeterminante bilden wir mit Hülfe der Formeln I, II, ..., V der Einleitung; für ihre Elemente ergibt sich

$$\xi_u = -a\sqrt{2}\,\frac{k'^2}{\operatorname{dn}u^2} + \frac{a}{\sqrt{2}}, \qquad \eta_u = -a\sqrt{2}\,kk'\,\frac{\operatorname{cn}u}{\operatorname{dn}u^2}, \quad \omega_u = \frac{a}{\sqrt{2}},$$

$$\xi_a = \frac{1}{\sqrt{2}}u - \sqrt{2}\left(E(u) - k^2\frac{\operatorname{sn}u\operatorname{cn}u}{\operatorname{dn}u}\right), \quad \eta_a = -kk'\sqrt{2}\,\frac{\operatorname{sn}u}{\operatorname{dn}u}, \quad \omega_a = \frac{u}{\sqrt{2}},$$

$$\xi_k = ak\sqrt{2}\,\frac{u\operatorname{cn}u^2 + E(u)\operatorname{sn}u^2 + \operatorname{sn}u\operatorname{cn}u\operatorname{dn}u}{\operatorname{dn}u^2},$$

$$\eta_k = -a\sqrt{2}\,\frac{k'^2\operatorname{sn}u\operatorname{dn}u - E(u)\operatorname{cn}u + k'^2 u\operatorname{cn}u}{k'\operatorname{dn}u^2},$$

$$\omega_k = 0.$$

Für eine der Ableitungen, etwa ξ_k, mag die ausführliche Berechnung hier Platz finden:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{a\sqrt{2}}\xi_k &= \frac{\partial}{\partial k}\left(E(u) - \frac{k^2\operatorname{sn}u\operatorname{cn}u}{\operatorname{dn}u}\right) = \frac{\partial E(u)}{\partial k} - 2k\,\frac{\operatorname{sn}u\operatorname{cn}u}{\operatorname{dn}u}\\ &\quad - k^2\,\frac{1}{\operatorname{dn}u^2}\left[\frac{\partial\operatorname{sn}u}{\partial k}\operatorname{cn}u\operatorname{dn}u + \frac{\partial\operatorname{cn}u}{\partial k}\operatorname{sn}u\operatorname{dn}u - \operatorname{sn}u\operatorname{cn}u\,\frac{\partial\operatorname{dn}u}{\partial k}\right]\\ &= -\frac{k}{k'^2}E(u)\operatorname{cn}u^2 - ku\operatorname{sn}u^2 + \frac{k}{k'^2}\operatorname{sn}u\operatorname{cn}u\operatorname{dn}u - 2k\,\frac{\operatorname{sn}u\operatorname{cn}u}{\operatorname{dn}u}\\ &\quad - k^2\,\frac{1}{\operatorname{dn}u^2}\left[-\frac{1}{kk'^2}E(u)\operatorname{cn}u^2\operatorname{dn}u^2 + \frac{1}{k}u\operatorname{cn}u^2\operatorname{dn}u^2\right.\\ &\quad + \frac{k}{k'^2}\operatorname{sn}u\operatorname{cn}u^3\operatorname{dn}u + \frac{1}{kk'^2}E(u)\operatorname{sn}u^2\operatorname{dn}u^2 - \frac{1}{k}u\operatorname{sn}u^2\operatorname{dn}u^2\\ &\quad - \frac{k}{k'^2}\operatorname{sn}u^3\operatorname{cn}u\operatorname{dn}u - \frac{k}{k'^2}E(u)\operatorname{sn}u^2\operatorname{cn}u^2 + ku\operatorname{sn}u^2\operatorname{cn}u^2\\ &\quad \left.+ \frac{k}{k'^2}\operatorname{sn}u^3\operatorname{cn}u\operatorname{dn}u\right] \end{aligned}$$

[1]) vgl. Bolza, V. ü. V., p. 535.

$$= -\frac{k}{k'^2} E(u)\,\mathrm{cn}u^2 - ku\,\mathrm{sn}u^2 + \frac{k}{k'^2}\,\mathrm{sn}u\,\mathrm{cn}u\,\mathrm{dn}u - 2k\,\frac{\mathrm{sn}u\,\mathrm{cn}u}{\mathrm{dn}u}$$
$$+ \frac{1}{\mathrm{dn}u^2}\left[\frac{k}{k'^2} E(u)\,\mathrm{cn}u^2\,\mathrm{dn}u^2 - ku\,\mathrm{cn}u^2\,\mathrm{dn}u^2 - \frac{k^3}{k'^2}\,\mathrm{sn}u\,\mathrm{cn}u^3\,\mathrm{dn}u\right.$$
$$- \frac{k}{k'^2} E(u)\,\mathrm{sn}u^2\,\mathrm{dn}u^2 + ku\,\mathrm{sn}u^2\,\mathrm{dn}u^2 + \frac{k^3}{k'^2} E(u)\,\mathrm{sn}u^2\,\mathrm{cn}u^2$$
$$\left. - k^3 u\,\mathrm{sn}u^2\,\mathrm{cn}u^2\right]$$

$$= \frac{k}{k'^2}\frac{1}{\mathrm{dn}u^2}\left[- E(u)\,\mathrm{cn}u^2\,\mathrm{dn}u^2 - k'^2 u\,\mathrm{sn}u^2\,\mathrm{dn}u^2 + \mathrm{sn}u\,\mathrm{cn}u\,\mathrm{dn}u^3\right.$$
$$- 2k'^2\,\mathrm{sn}u\,\mathrm{cn}u\,\mathrm{dn}u + E(u)\,\mathrm{cn}u^2\,\mathrm{dn}u^2 - k'^2 u\,\mathrm{cn}u^2\,\mathrm{dn}u^2$$
$$- k^2\,\mathrm{sn}u\,\mathrm{cn}u^3\,\mathrm{dn}u - E(u)\,\mathrm{sn}u^2\,\mathrm{dn}u^2 + k'^2 u\,\mathrm{sn}u^2\,\mathrm{dn}u^2$$
$$\left. + k^2 E(u)\,\mathrm{sn}u^2\,\mathrm{cn}u^2 - k^2 k'^2 u\,\mathrm{sn}u^2\,\mathrm{cn}u^2\right]$$

$$= \frac{k}{k'^2}\frac{1}{\mathrm{dn}u^2}\left[- k'^2 u\,\mathrm{cn}u^2 + \mathrm{sn}u\,\mathrm{cn}u\,\mathrm{dn}u\,(\mathrm{dn}u^2 - k^2\,\mathrm{cn}u^2)\right.$$
$$\left. - 2k'^2\,\mathrm{sn}u\,\mathrm{cn}u\,\mathrm{dn}u - E(u)\,\mathrm{sn}u^2\,(\mathrm{dn}u^2 - k^2\,\mathrm{cn}u^2)\right]$$

$$= \frac{k}{k'^2}\frac{1}{\mathrm{dn}u^2}\left[- k'^2 u\,\mathrm{cn}u^2 - k'^2\,\mathrm{sn}u\,\mathrm{cn}u\,\mathrm{dn}u - k'^2 E(u)\,\mathrm{sn}u^2\right],$$

$$\xi_k = ak\sqrt{2}\,\frac{u\,\mathrm{cn}u^2 + E(u)\,\mathrm{sn}u^2 + \mathrm{sn}u\,\mathrm{cn}u\,\mathrm{dn}u}{\mathrm{dn}u^2}.$$

Entwickelt man die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \xi_u & \xi_a & \xi_k \\ \eta_u & \eta_a & \eta_k \\ \omega_u & \omega_a & \omega_k \end{vmatrix}$$

nach den Elementen der letzten Kolonne, wobei man gleich den Summanden ω in ξ unterdrückt, so findet man für die Unterdeterminanten

$$\Delta_1 = \frac{kk'\,(\mathrm{sn}u\,\mathrm{dn}u - u\,\mathrm{cn}u)}{\mathrm{dn}u^2},$$

$$\Delta_2 = \frac{k'^2 u + k^2\,\mathrm{sn}u\,\mathrm{cn}u\,\mathrm{dn}u - E(u)\,\mathrm{dn}u^2}{\mathrm{dn}u^2}$$

also schliesslich durch einfache Rechnung für die Determinante selbst

(6) $$\Delta = a^2\sqrt{2}\,\frac{\left(E(u)-k'^2u\right)\operatorname{sn}u\operatorname{dn}u-\left(E(u)-k'^2u\right)^2\operatorname{cn}u-k^2k'^2u^2\operatorname{cn}u}{k'\operatorname{dn}u^2}.$$

Hieraus folgt

$$\Delta(0)=0,\ \Delta(K)=\frac{a^2\sqrt{2}}{k'^2}(E-k'^2K),$$

$$\Delta(2K)=\frac{4a^2\sqrt{2}}{k'}\left[(E-k'^2K)^2+k^2k'^2K^2\right],\ \Delta(3K)=-\frac{3a^2\sqrt{2}}{k'^2}(E-k'^2K),$$

denn es ist für ganzzahliges m

$$E(mK)=mE.$$

Schon früher (§ 15) wurde benutzt, dass stets

$$E-k'^2K>0$$

ist, mithin hat man

$$\Delta(0)=0,\ \Delta(K)>0,\ \Delta(2K)>0,\ \Delta(3K)<0,$$

folglich existiert auf jeder Extremalen ein zum Nullpunkt konjugierter Punkt $Q(v)$ im Intervalle

$$2K<u<3K.$$

Die Grösse v aber ist zufolge der sie bestimmenden Gleichung

(7) $$\left(E(u)-k'^2u\right)\operatorname{sn}u\operatorname{dn}u-\left(E(u)-k'^2u\right)^2\operatorname{cn}u-k^2k'^2u^2\operatorname{cn}u=0$$

von einem Scharparameter, dem veränderlichen Modul k, abhängig, erstens explizit, zweitens implizit, insofern als die Werte der elliptischen Funktionen $\operatorname{sn}u$, $\operatorname{cn}u$, $\operatorname{dn}u$, $E(u)$ von ihm abhängen. v hat also keineswegs mehr, wie bei den beiden ersten isoperimetrischen Aufgaben, für alle Extremalen denselben Wert.

Um über die Anzahl der Nullstellen der Funktion Δ im Intervall

(8) $$0<u\leqq 3K$$

zu entscheiden, benutzen wir die Bemerkung von Herrn Lindemann. Nachdem wir Δ durch elementare Rechnung auf die Form gebracht haben

$$\Delta=a^2\sqrt{2}\,\frac{k^2k'\operatorname{cn}u}{\operatorname{dn}u^2}\left[\left(-\frac{1}{k^2}u+\frac{k'^2-k^2}{k^2k'^2}E(u)+\frac{1}{k'^2}\frac{\operatorname{sn}u\operatorname{dn}u}{\operatorname{cn}u}\right)\left(k'^2u\right.\right.$$

$$\left.\left.-(k'^2-k^2)E(u)+k'^2\frac{\operatorname{sn}u\operatorname{dn}u}{\operatorname{cn}u}\right)-\left(u-2E(u)+\frac{\operatorname{sn}u\operatorname{dn}u}{\operatorname{cn}u}\right)^2\right],$$

betrachten wir die durch

$$\mathfrak{D}(u)=a^2\sqrt{2}\,\frac{k^2k'\operatorname{cn}u}{\operatorname{dn}u^2}\left[k'^2u-(k'^2-k^2)E(u)+k'^2\frac{\operatorname{sn}u\operatorname{dn}u}{\operatorname{cn}u}\right]$$

dividierte Determinante, also die Funktion

$$(9)\quad \varphi(u) = \frac{1}{k'^2 u - (k'^2 - k^2)\,E(u) + k'^2 \dfrac{\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u}} \times$$

$$\left\{\left(-\frac{1}{k^2}\,u + \frac{k'^2 - k^2}{k^2 k'^2}\,E(u) + \frac{1}{k'^2}\,\frac{\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u}\right)\left(k'^2 u - (k'^2 - k^2)\,E(u)\right.\right.$$

$$\left.\left. + k'^2 \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u}\right) - \left(u - 2\,E(u) + \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u}\right)^2\right\}$$

$$= -\frac{1}{k^2}\,u + \frac{k'^2 - k^2}{k^2 k'^2}\,E(u) + \frac{1}{k'^2}\,\frac{\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u}$$

$$- \frac{\left(u - 2\,E(u) + \dfrac{\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u}\right)^2}{k'^2 u - (k'^2 - k^2)\,E(u) + k'^2 \dfrac{\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u}}.$$

Zähler und Nenner der Funktion $\varphi(u)$ können ausser für $u = 0$ nie gleichzeitig verschwinden, denn sonst müssten für denselben Wert u_1 von u gleichzeitig die Gleichungen

$$\psi(u_1) = k'^2 u_1 - (k'^2 - k^2)\,E(u_1) + k'^2 \frac{\operatorname{sn} u_1 \operatorname{dn} u_1}{\operatorname{cn} u_1} = 0,$$

$$u_1 - 2\,E(u_1) + \frac{\operatorname{sn} u_1 \operatorname{dn} u_1}{\operatorname{cn} u_1} = 0$$

bestehen, woraus für denselben Wert u_1 die nur für $u = 0$ gültige Gleichung

$$E(u_1) = 0$$

folgen würde. Ferner sind die Pole des Nenners $\psi(u)$ von $\varphi(u)$ keine Nullstellen von $\varphi(u)$, denn man hat

$$\varphi\left((2n+1)\,K\right) = (2n+1)\,\frac{E - k'^2 K}{k^2 k'^4} > 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Folglich haben die Funktionen Δ und $\varphi(u)$ genau dieselben Wurzeln.

Indem wir die durch einfache Differentiation zu beweisenden Formeln

$$\frac{d}{du}\left(-\frac{1}{k^2}\,u + \frac{k'^2 - k^2}{k^2 k'^2}\,E(u) + \frac{1}{k'^2}\,\frac{\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u}\right) = \frac{\operatorname{sn} u^4}{\operatorname{cn} u^2},$$

$$\frac{d}{du}\left(u - 2\,E(u) + \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u}\right) = \frac{\operatorname{sn} u^2 \operatorname{dn} u^2}{\operatorname{cn} u^2},$$

$$\frac{d}{du}\left(k'^2 u - (k'^2 - k^2)\,E(u) + k'^2 \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u}\right) = \frac{\operatorname{dn} u^4}{\operatorname{cn} u^2}$$

benutzen, finden wir für die Ableitung $\varphi'(u)$

$$\varphi'(u) = \frac{\operatorname{sn} u^4}{\operatorname{cn} u^2} - \frac{1}{\left[k'^2 u - (k'^2 - k^2)\, E(u) + k'^2 \dfrac{\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u}\right]^2} \times$$

$$\left\{2\left(u - 2E(u) + \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u}\right)\frac{\operatorname{sn} u^2 \operatorname{dn} u^2}{\operatorname{cn} u^2}\left[k'^2 u - (k'^2 - k^2)\, E(u) + k'^2 \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u}\right]\right.$$

$$\left. - \left(u - 2\,E(u) + \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u}\right)^2 \frac{\operatorname{dn} u^4}{\operatorname{cn} u^2}\right\}$$

$$(10) \qquad \varphi'(u) = \left(\frac{\operatorname{sn} u^2}{\operatorname{cn} u} - \frac{\left(u - 2\,E(u) + \dfrac{\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u}\right)\dfrac{\operatorname{dn} u^2}{\operatorname{cn} u}}{k'^2 u - (k'^2 - k^2)\, E(u) + k'^2 \dfrac{\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u}}\right)^2 .$$

$\varphi(u)$ ist demnach eine beständig wachsende Funktion. Ihre Unendlichkeitsstellen sind durch die Nullstellen ihres Nenners

$$\psi(u) = k'^2 u - (k'^2 - k^2)\, E(u) + k'^2 \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u}$$

gegeben. Auch $\psi(u)$ ist wegen

$$\psi'(u) = \frac{\operatorname{dn} u^4}{\operatorname{cn} u^2}$$

eine beständig wachsende Funktion; da ihre positiven reellen Pole die ungeraden Vielfachen von K sind, besitzt sie im Intervalle (8) eine und nur eine Nullstelle. Die Funktion $\varphi(u)$ hat also in diesem Intervalle eine und nur eine Unendlichkeitsstelle und kann, da sie eine beständig wachsende Funktion ist, in ihm auch nur eine Nullstelle haben. Sie hat aber eine zwischen $u = 2K$ und $u = 3K$ gelegene Nullstelle v, da wir eine solche für Δ festgestellt haben: folglich gibt es in (8) genau eine Nullstelle v der Funktion $\varphi(u)$ und also auch der Determinante Δ.

In Fig. 18 (M.E. 1 cm) ist auf einer Extremalen ($k = \sin 15^0$, $a = -3$) der zum Nullpunkt konjugierte Punkt Q ($v = 4{,}67\ldots$) angedeutet.

Im Falle

B. tritt zu der Differentialgleichung (1) als weitere notwendige Extremumsbedingung die der Transversalität zu der x-Achse

$$(h - ph_p)\,\delta x + h_p\,\delta y \Big|^{y=0} = 0,$$

$$\left(y^2 + \frac{\lambda}{\sqrt{1+p^2}}\right)\delta x + \frac{\lambda p}{\sqrt{1+p^2}}\,\delta y \Big|^{y=0} = 0,$$

$$1 + p\,\frac{\delta y}{\delta x}\Big|^{y=0} = 0: \tag{11}$$

sie drückt die Orthogonalität zwischen Extremalen und x-Achse aus. Setzt man (1) in (11) ein, so erhält man

$$1 + \frac{\sqrt{\lambda^2 - (y^2 - c)^2}}{y^2 - c}\,\frac{\delta y}{\delta x}\Big|^{y=0} = 0$$

oder, da

$$\frac{\delta y}{\delta x} = 0,$$

$$c = 0.$$

Die Gleichung (1) wird jetzt

$$dx = \frac{y^2\,dy}{\sqrt{\lambda^2 - y^4}}; \tag{12}$$

für das isoperimetrische Integral findet man

$$\omega = \int \sqrt{1+p^2}\,dx = \int_0^y \frac{\lambda}{y^2}\,\frac{y^2\,dy}{\sqrt{\lambda^2 - y^4}} = \int_0^y \frac{\lambda\,dy}{\sqrt{\lambda^2 - y^4}}, \tag{13}$$

und dies ist das elliptische Integral erster Gattung. Wir führen

$$\omega = u \tag{14}$$

als Parameter ein, dann wird auf Grund einer schon oft durchgeführten Rechnung (vgl. §§ 3, 7)

$$y = a\sqrt{2}\,\operatorname{cn}\left(\frac{u}{a} - K\right) = a\,\frac{\operatorname{sn}\frac{u}{a}}{\operatorname{dn}\frac{u}{a}}, \quad k^2 = \frac{1}{2}, \tag{15}$$

wenn

$$\lambda = 2a^2$$

gesetzt und die Integrationskonstante so gewählt ist, dass y und u gleichzeitig verschwinden, d. h. wenn die Bogenlänge von der x-Achse aus gerechnet ist. Die Gleichung (12) wird jetzt

$$dx = 2a^2\,\operatorname{cn}\left(\frac{u}{a} - K\right)^2\,\frac{du}{2a^2} = \left(2\,\operatorname{dn}\left(\frac{u}{a} - K\right)^2 - 1\right)du,$$

und die Integration ergibt, wenn b Integrationskonstante ist,

$$(16) \qquad x = 2a\left[E\left(\frac{u}{a} - K\right) + E\right] - u + b.$$

Die zur x-Achse transversale Extremalenschar ist nach (14), (15), (16) durch die Gleichungen gegeben

$$x = 2a\left[E\left(\frac{u}{a} - K\right) + E\right] - u + b = \xi(u, a, b),$$

$$(17) \qquad y = a\frac{\operatorname{sn}\frac{u}{a}}{\operatorname{dn}\frac{u}{a}} = \eta(u, a, b),$$

$$\omega = u = \omega(u, a, b)$$

mit dem konstanten Werte des Jacobischen Moduls

$$k = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Die Gleichung zur Bestimmung des extremalen Brennpunktes zur x-Achse

$$\Delta = \begin{vmatrix} \xi_u & \xi_a & \xi_b \\ \eta_u & \eta_a & \eta_b \\ \omega_u & \omega_a & \omega_b \end{vmatrix} = 0$$

vereinfacht sich, weil das isoperimetrische Integral selbst als Parameter eingeführt, also

$$\omega_u = 1, \ \omega_a = \omega_b = 0$$

ist, auf

$$\Delta = \begin{vmatrix} \xi_a & \xi_b \\ \eta_a & \eta_b \end{vmatrix} = 0$$

und weiter, weil auch

$$\eta_b = 0, \ \xi_b = 1$$

ist, auf

$$(18) \qquad \Delta = \eta_a = 0.$$

Man hat aber (vgl. § 3)

$$(19) \qquad \Delta = \eta_a = \frac{\operatorname{sn}\frac{u}{a}\operatorname{dn}\frac{u}{a} - \frac{u}{a}\operatorname{cn}\frac{u}{a}}{\operatorname{dn}\frac{u^2}{a}},$$

die Gleichung für den extremalen Brennpunkt lautet mithin

$$(20) \qquad v - \frac{\operatorname{sn} v \operatorname{dn} v}{\operatorname{cn} v} = 0, \quad v = \frac{u}{a},$$

es ist dieselbe Gleichung wie § 3, (3).

Soweit ist nach dieser Richtung die Aufgabe B. bei Bolza[1]) behandelt. Aus der Gleichung (20) wird dort auf die Nichtexistenz des extremalen Brennpunktes geschlossen, weil die Extremalen (17) auf die obere Halbebene, die Grösse v also auf das Intervall

$$0 \leqq v \leqq 2K = 3{,}7082\ldots .$$

beschränkt wird. In der Tat ist die erste auf $v = 0$ folgende Nullstelle der linken Seite von (20) nach § 3

$$w = 5{,}37\ldots > 3{,}7082\ldots .$$

Lässt man also die Beschränkung der Extremalen auf die obere Halbebene fallen, so existiert ein extremaler Brennpunkt zur x-Achse auf jeder Extremalen, und er ist für alle Extremalen durch denselben Wert von v gegeben,

(21) $$v = w = 5{,}37\ldots .$$

Wir greifen nun aus der zweiparametrigen Extremalenschar (17) eine einfach unendliche so heraus, dass die Enveloppe dieser Schar jede Extremale im extremalen Brennpunkte zur x-Achse berührt. Dazu haben wir zwischen den beiden Parametern a und b wieder die Differentialgleichung[2])

$$(\xi_u \eta_a - \xi_a \eta_u)\, da + (\xi_u \eta_b - \xi_b \eta_u)\, db = 0$$

zu integrieren, die wir wegen des Verschwindens der Funktionaldeterminante auch durch folgende ersetzen können

(22) $$(\omega_u \xi_a - \omega_a \xi_u)\, da + (\omega_u \xi_b - \omega_b \xi_u)\, db = 0 .$$

Man findet, wenn man die Gleichung für den extremalen Brennpunkt

(21) $$v = w = \text{const}$$

beachtet, wegen

$$\omega_a = \omega_b = 0$$

$$\xi_a\, da + \xi_b\, db = 0 ,$$

$$\left\{2\left[E(w-K) + E\right] - 2w\,\mathrm{dn}\,(w-K)^2\right\} da + db = 0 .$$

Da der Faktor von da von a und b unabhängig ist, so ergibt diese Gleichung, so integriert, dass a und b gleichzeitig verschwinden

$$b = -\left\{2\left[E(w-K) + E\right] - 2w\,\mathrm{dn}\,(w-K)^2\right\} a ,$$

und also ist nach (17) der ausgezeichnete nur noch einfach unendliche Extremalenbüschel

---

[1]) V. ü. V., p. 540 f., Aufg. 34.

[2]) Kneser, L. d. V., § 40.

$$x = 2a\left[E(v-K)+E\right]-av$$
$$-2a\left[E(w-K)+E-w\,\mathrm{dn}(w-K)^2\right] = \xi\ (v, a),$$

(23)
$$y = a\,\frac{\mathrm{sn}\,v}{\mathrm{dn}\,v} = a\sqrt{2}\,\mathrm{cn}\,(v-K) \qquad = \eta\ (v, a),$$
$$\omega = av \qquad = \omega\ (v, a),$$
$$k^2 = \frac{1}{2}.$$

Die Gleichung der Enveloppe erhalten wir durch Verbindung von (23) mit der Gleichung für den Brennpunkt

$$v = w,$$

also

$$x = 2\,aw\,\mathrm{dn}(w-K)^2 - aw = aw\,\mathrm{cn}(w-K)^2,$$
$$y = a\sqrt{2}\,\mathrm{cn}(w-K),$$

durch Division

(24)
$$\frac{y}{x} = \frac{\sqrt{2}}{w\,\mathrm{cn}(w-K)} = \frac{2\,\mathrm{dn}\,w}{w\,\mathrm{sn}\,w}.$$

Da aber nach (20)

$$w = \frac{\mathrm{sn}\,w\,\mathrm{dn}\,w}{\mathrm{cn}\,w}$$

ist, so können wir, wenn wir die zu dem konstanten Argumente w gehörigen elliptischen Funktionen wieder kurz mit

(25)
$$\mathrm{sn}\,w = S,\ \mathrm{cn}\,w = C,\ \mathrm{dn}\,w = D$$

bezeichnen, (24) d. h. die Gleichung der Enveloppe schreiben

(26)
$$y = \frac{2C}{S^2}\,x.$$

Das isoperimetrische Integral hat längs der Enveloppe, weil dort

$$1 + p^2 = 1 + \frac{4\,C^2}{S^4} = \left(2\,\frac{D^2}{S^2}\right)^2$$

ist, den Wert

(27)
$$\omega = 2\,\frac{D^2}{S^2}\,x.$$

Wird ω als dritte Raumkoordinate z gedeutet, so stellen die Gleichungen (26), (27) die räumliche Enveloppe der räumlichen Kurvenschar (23) dar.

In Fig. 19 (M. E. 1 cm) sind drei Extremalen ($a = 1, 2, 3$) und ihre Enveloppe in der xy-Ebene gezeichnet.

Das isoperimetrische Integral hat, längs einer Extremalen von ihrem Schnittpunkte mit der x-Achse bis zu einem beliebigen Punkte 1 ausgerechnet, nach (23) den Wert

(28) $$\bar{K}_{01} = a v_1 .$$

Ist speziell 1 der extremale Brennpunkt der x-Achse, so ist wegen

$$v_1 = \frac{SD}{C}, \quad x = aw \operatorname{cn}(w - K)^2 = \frac{1}{2} a \frac{S^3}{CD}, \quad a = \frac{2CD}{S^3} x$$

(29) $$\bar{K}_{01} = 2\frac{D^2}{S^2} x_1 ,$$

entsprechend für eine zweite Extremale

(30) $$\bar{K}_{02} = 2\frac{D^2}{S^2} x_2 .$$

Das längs der Enveloppe zwischen den Punkten (1, 2) berechnete Integral K ist nach (27)

(31) $$K_{12} = 2\frac{D^2}{S^2}(x_2 - x_1);$$

die Gleichungen (29), (30), (31) besagen

A. $$K_{01} + K_{12} = \bar{K}_{02} .$$

Das zum Extremum zu machende Integral hat, von der x-Achse bis zu einem beliebigen Punkte 1 einer Extremalen genommen, den Wert

$$\bar{J}_{01} = \int y^2 \, dx = \int_0^{v_1} 2 a^3 \operatorname{cn}(v - K)^4 \, dv .$$

Benutzt man den in § 3, (12) ausgerechneten Wert dieses Integrals

(32) $$\bar{J}_{01} = \frac{2}{3} a^3 \left[v_1 - \frac{\operatorname{sn} v_1 \operatorname{cn} v_1}{\operatorname{dn} v_1^3} \right],$$

so ergibt sich, wenn 1 der Brennpunkt der x-Achse ist, nach § 3, (13)

(33) $$\bar{J}_{01} = \frac{4}{3}\frac{C^2}{S^4} x_1^3 ,$$

und für eine zweite Extremale

(34) $$\bar{J}_{02} = \frac{4}{3}\frac{C^2}{S^4} x_2^3 .$$

Das längs der Enveloppe zwischen den Punkten 1 und 2 gebildete Integral ist

(35) $$J_{12} = \int_1^2 y^2 \, dx = \frac{4C^2}{S^4} \int_{x_1}^{x_2} x^2 \, dx = \frac{4}{3}\frac{C^2}{S^4}(x_2^3 - x_1^3),$$

also ist nach (33), (34), (35)

B. $$\bar{J}_{01} + J_{12} = \bar{J}_{02} .$$

Die Gleichungen A. und B. stellen das Aufhören des Extremums vor Augen.

Weiter habe ich folgende Aufgaben behandelt:

$\delta \int (y^{2n} - p^2)\, dx = 0$, $n = 2, 3$ (Enveloppe der Extremalen durch den Nullpunkt).

Das Problem $\delta \int \sqrt{U+h}\, ds = 0$ in den Fällen

$$\left.\begin{aligned} U &= -\frac{1}{y^4}, \quad h > 0, \\ U &= +\frac{1}{y^4}, \quad h < 0 \end{aligned}\right\} \text{(konjugierte Punkte).}$$

Das Problem $\delta \int (U+h)\, ds = 0$ in den Fällen

$$\left.\begin{aligned} U &= y^2, \quad h \gtreqless 0, \\ U &= \frac{1}{y^2}, \quad h \gtreqless 0, \\ U &= \frac{1}{r^2}, \quad h \gtreqless 0 \end{aligned}\right\} \text{(konjugierte Punkte).}$$

Stabilität des Gleichgewichts eines Fadens unter dem Einfluss einer Zentralkraft, die umgekehrt proprotional dem Quadrat der Entfernung wirkt.

Kurve kleinsten Trägheitsmoments inbezug auf eine Achse bei gegebener Länge (Bestimmung des konjugierten Punktes zu einem festen Punkte).

Das Integral $\int p^2\, dx$ *zu einem Minimum zu machen, wenn das Integral* $\int y^6\, dx$ *einen vorgeschriebenen Wert hat* (konjugierte Punkte und Enveloppe für die Extremalenschar durch den Nullpunkt).

Lebenslauf.

Am 22. April 1890 wurde ich, Lothar Koschmieder, evangelischer Religion, Sohn des Mittelschul-Rektors Johannes Koschmieder und seiner Frau Elisabeth geb. Gürich, in Liegnitz geboren. Den ersten Unterricht erteilte mir mein Vater; von Ostern 1899 ab besuchte ich das städtische Gymnasium zu Liegnitz und verliess es Ostern 1908 mit dem Zeugnis der Reife. Seitdem studiere ich Mathematik und Physik; ich hörte auch Vorlesungen über Musikwissenschaft, Philosophie und in den ersten Semestern über vergleichende Sprachforschung. Mit Ausnahme des Sommersemesters 1909, in dem ich in Freiburg i. B., und des Sommersemesters 1910, in dem ich in Göttingen studierte, war ich an der Universität Breslau bis Ostern 1913 immatrikuliert; in späteren Semestern besuchte ich auch Vorlesungen an der Technischen Hochschule in Breslau, an der ich im S.-S. 1913 immatrikuliert war.

Ich besuchte die Vorlesungen und Übungen der Herren Professoren und Dozenten:

Baumgartner, Bohn †, von dem Borne, Franz †, Hoenigswald, Hoffmann, Kinkeldey, Kneser, Kühnemann, Lummer, Pringsheim, Rosanes, Schaefer, Schmidt, Skutsch †, Stern, Sturm, Waetzmann, Ziegler an der Universität Breslau,

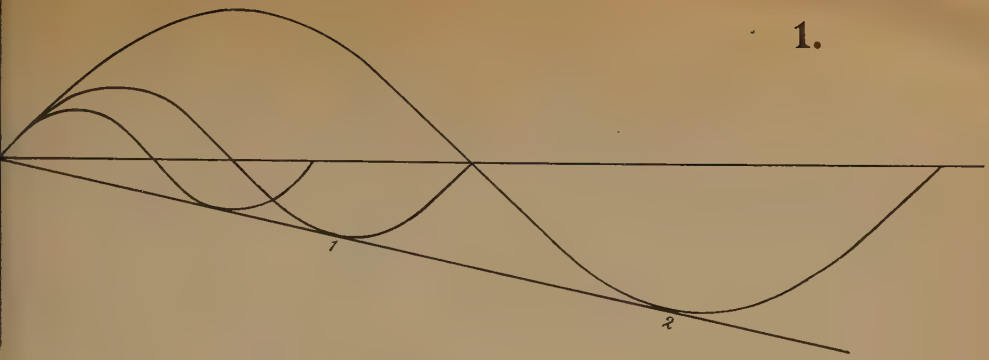
Caratheodory, Hessenberg an der Technischen Hochschule Breslau,

Himstedt, Loewy, Lüroth, Stickelberger in Freiburg,

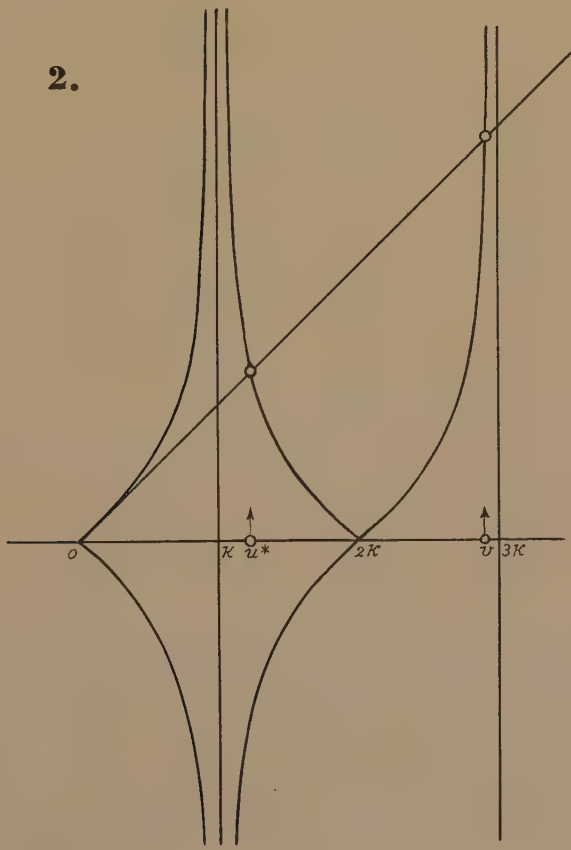
Ambron, Bernstein, Hilbert, Koebe, Riecke, Runge, Wiechert in Göttingen.

Allen diesen meinen verehrten Lehrern spreche ich für reiche Anregung und Förderung meinen aufrichtigsten Dank aus.

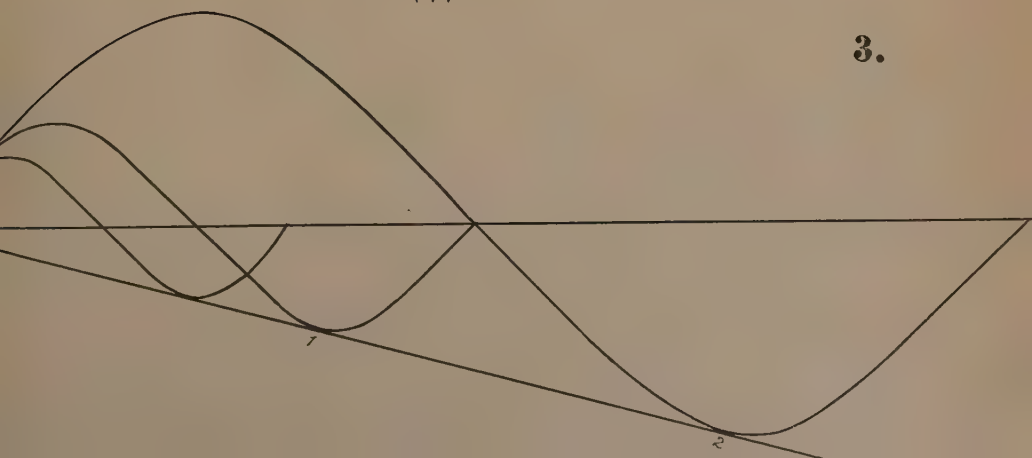
1.



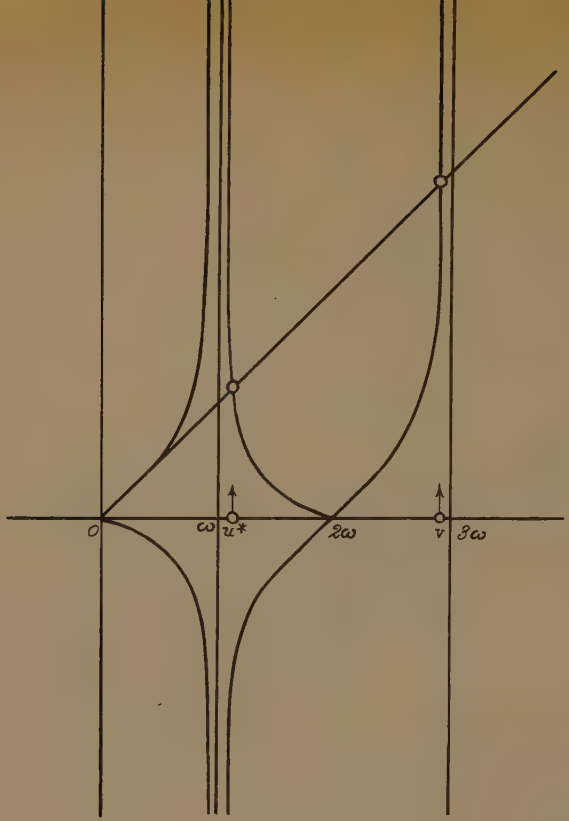
2.



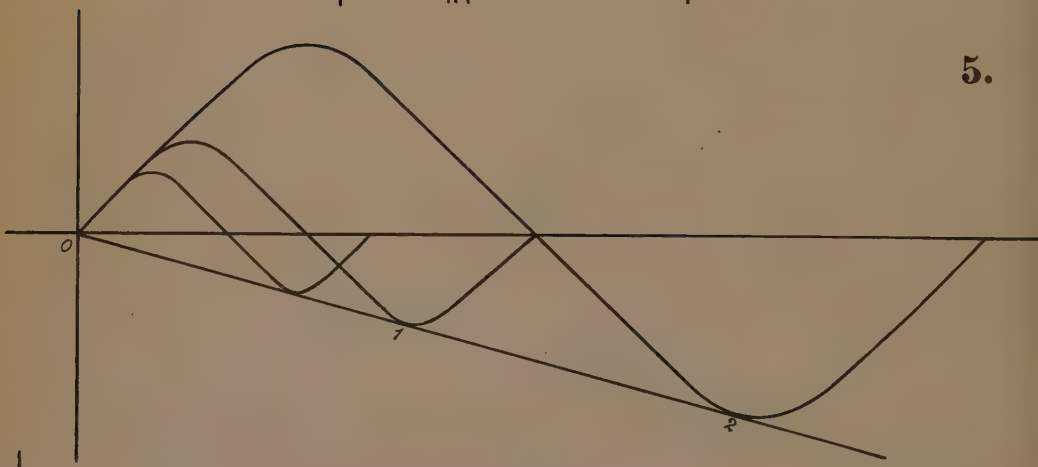
3.



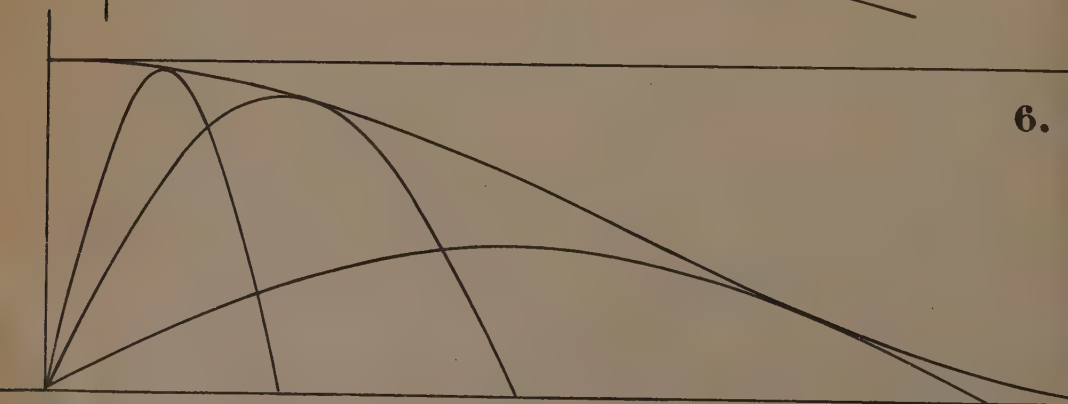
4.



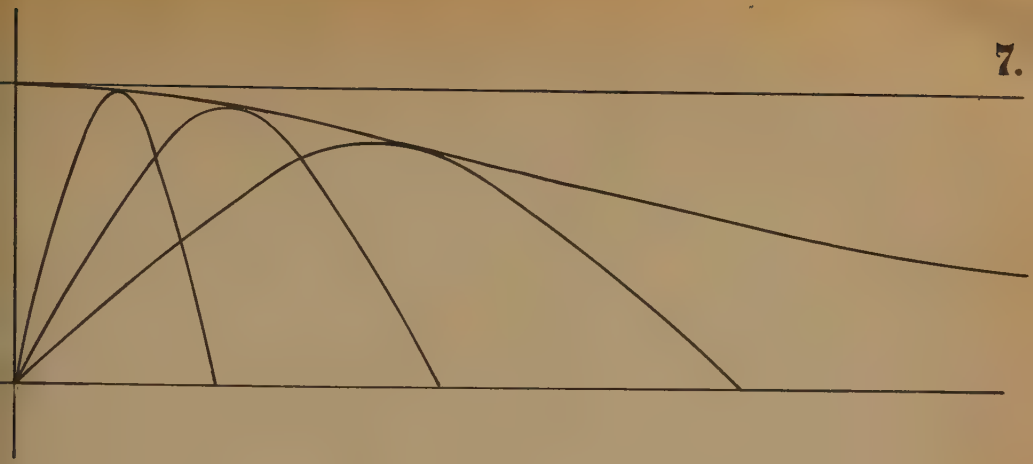
5.



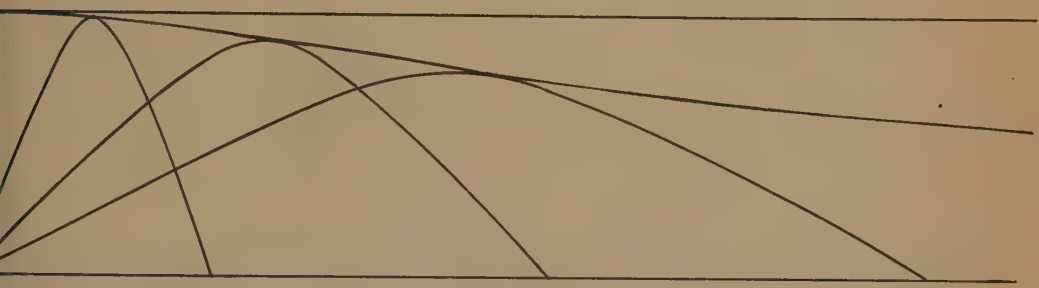
6.



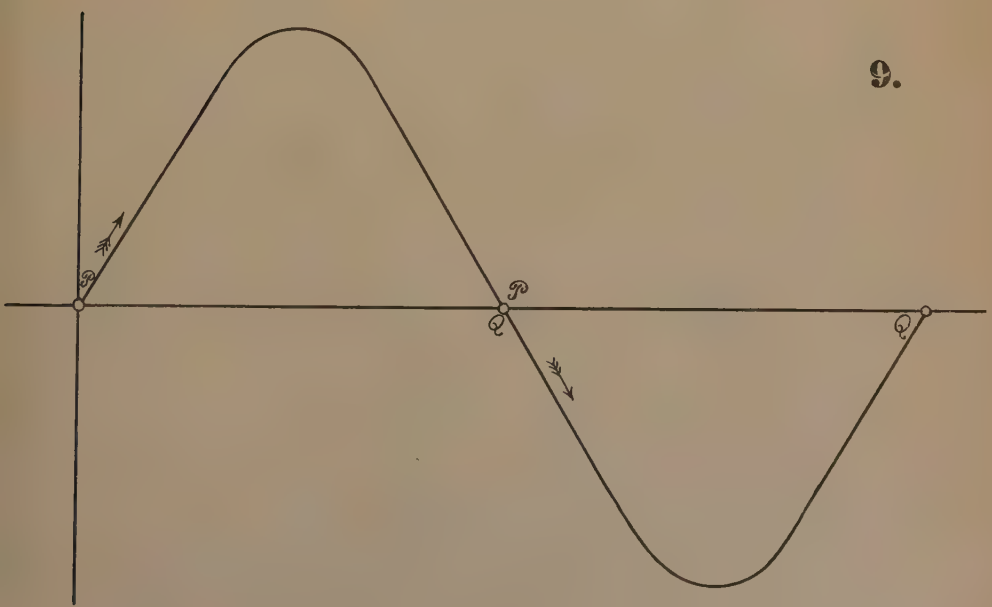
7.

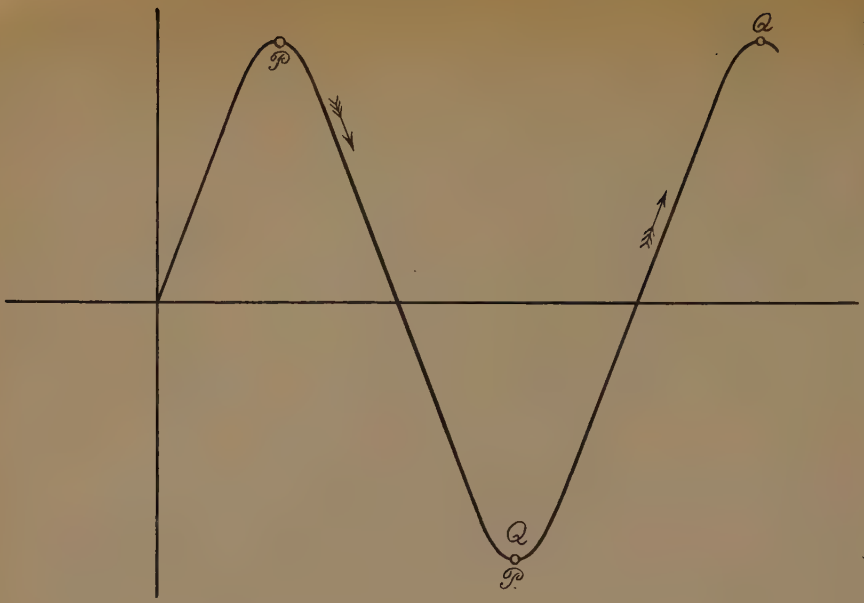


8.

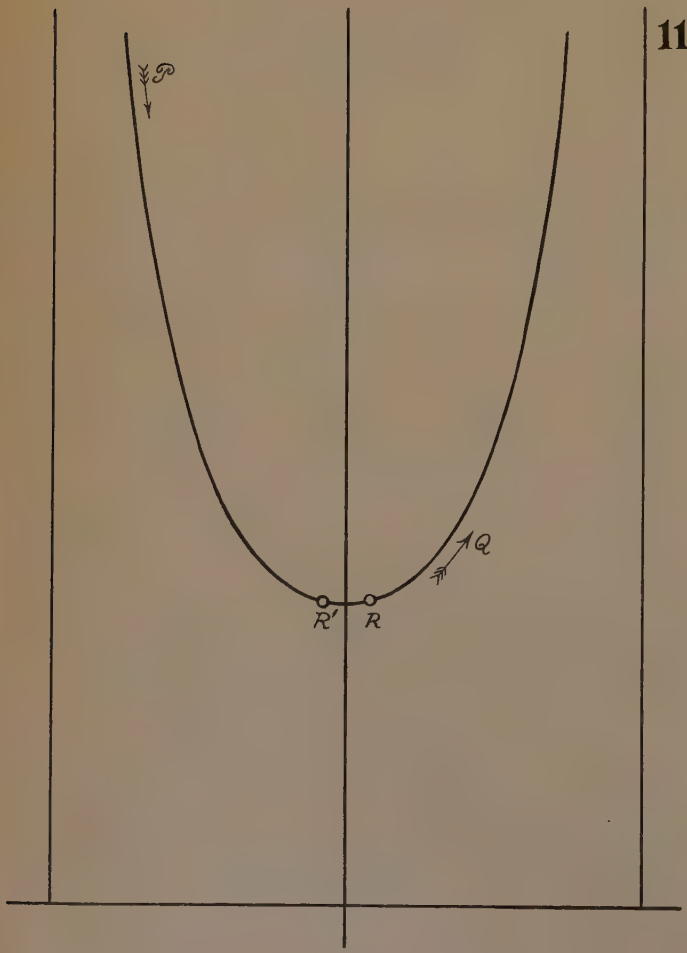


9.

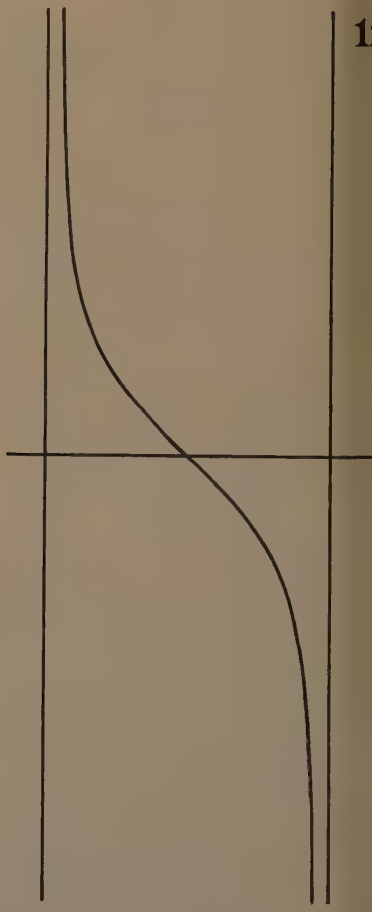




10.

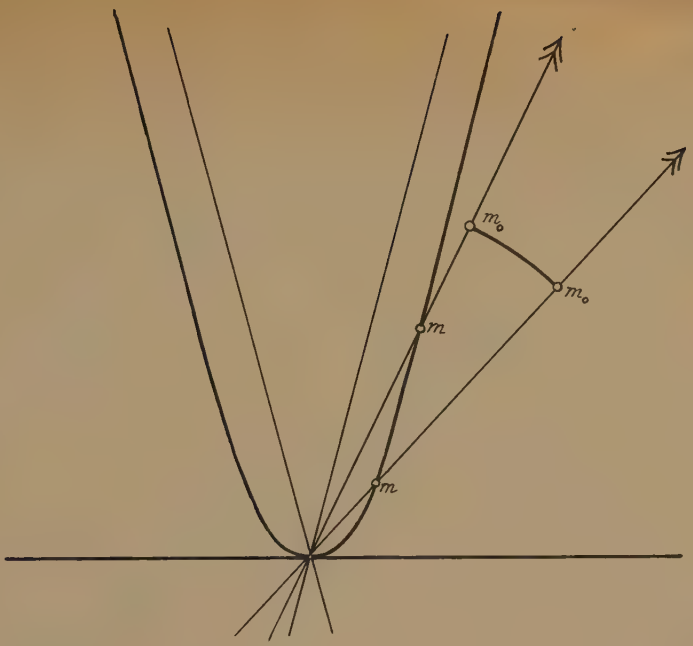


11.

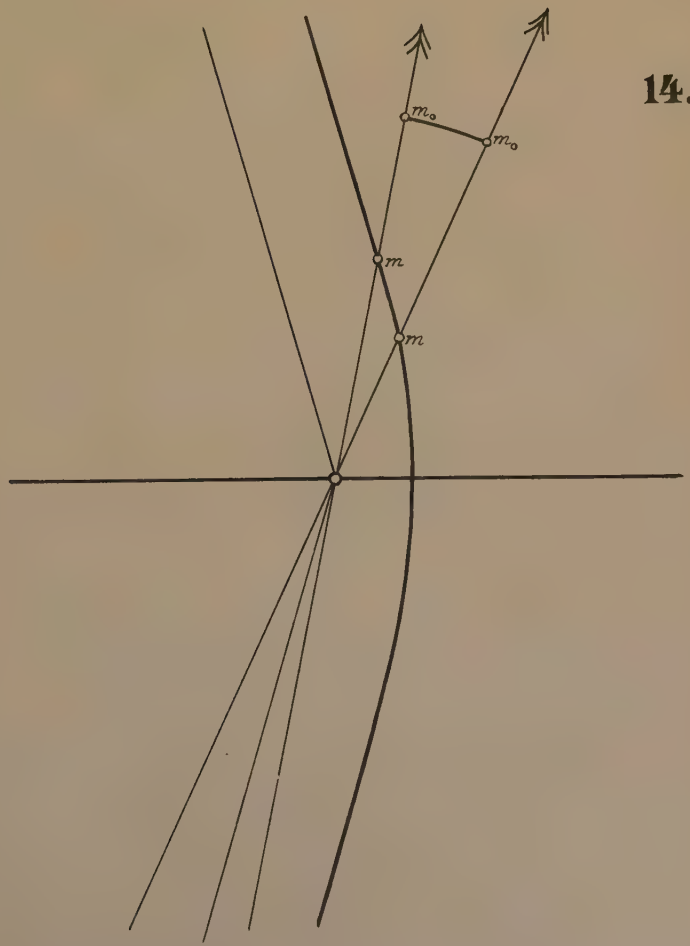


1

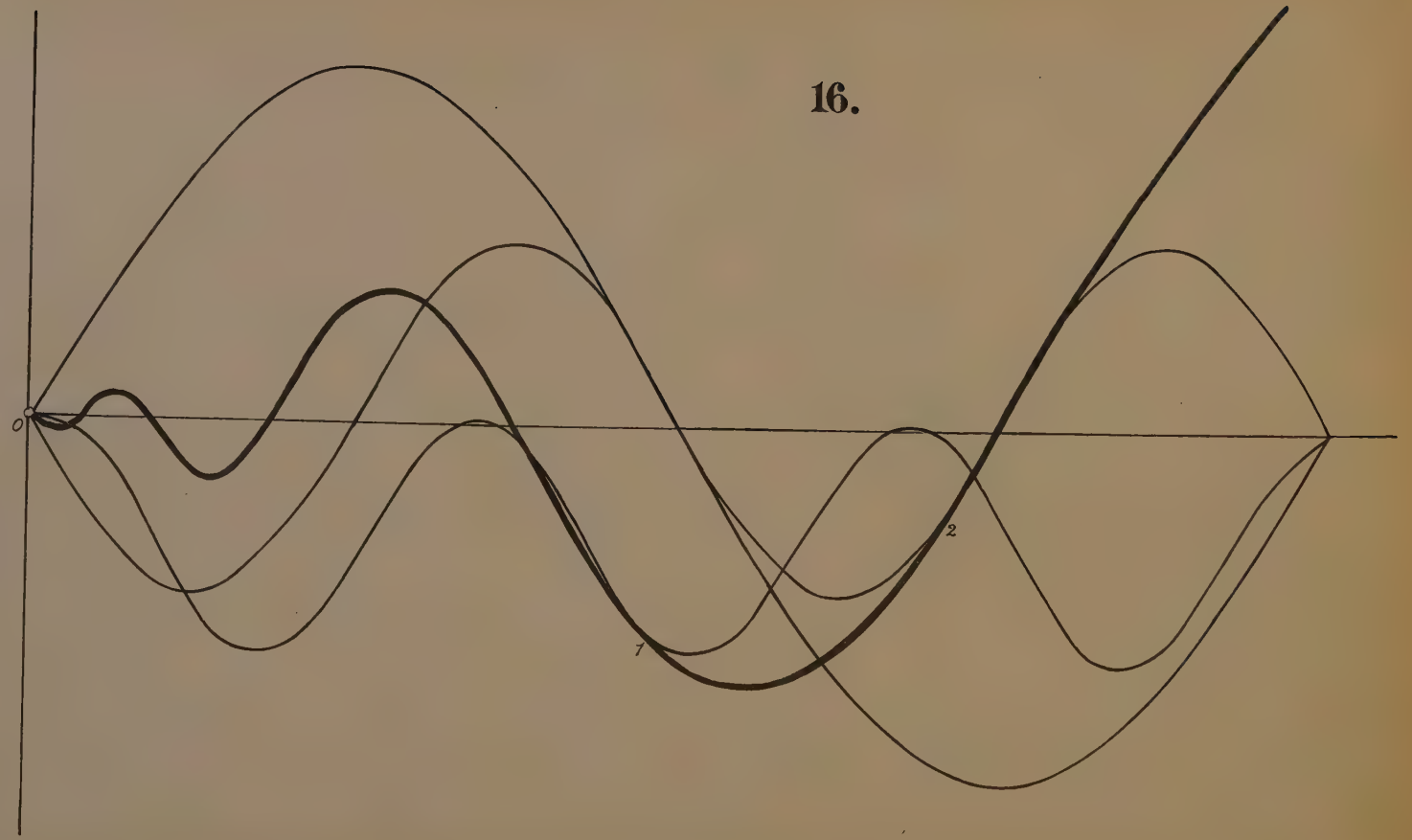
13.



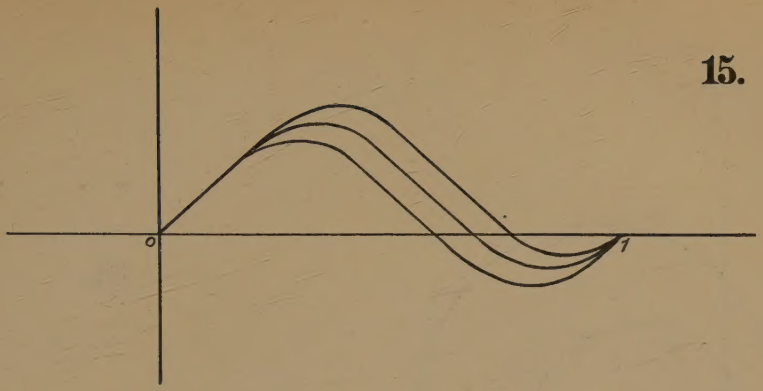
14.



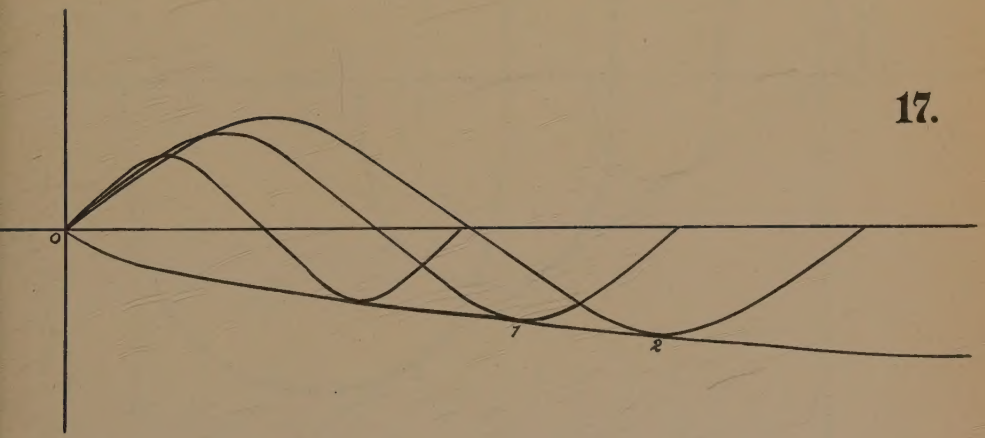
16.



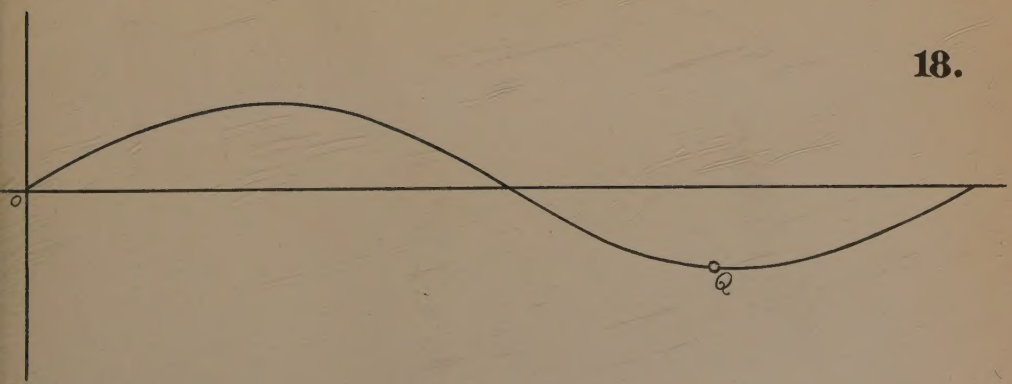
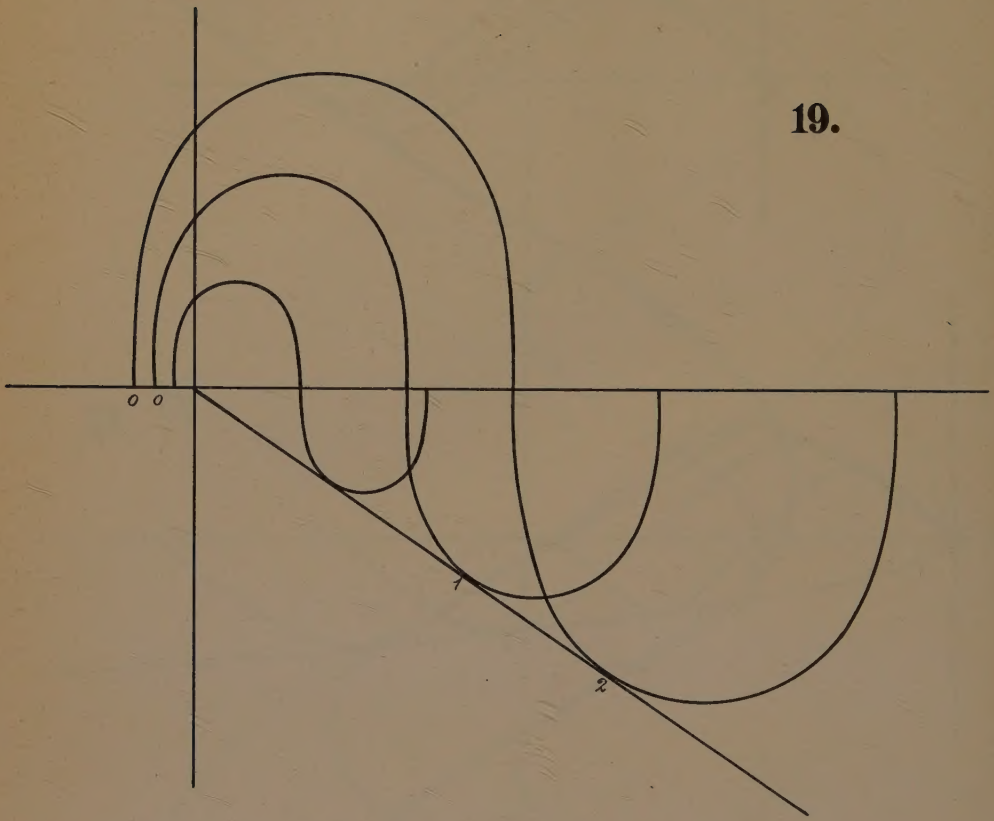
15.



17.



18.



19.